


# ANTOLIGIA

# I

# ECUACIONES DIFERENCIALES



**Prof. Alejandro Cervantes Alvarez**

# MÉTODOS CLÁSICOS DE RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

# ÍNDICE

# GENERALIDADES

Desde los primeros pasos en el cálculo diferencial, de todos es conocido que, dada una función $y = f(x)$, su derivada $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ es también una función que se puede encontrar mediante ciertas reglas. Por ejemplo, si $y = e^{-x^3}$, entonces $\frac{dy}{dx} = -3x^2e^{-x^3}$ o, lo que es lo mismo, $\frac{dy}{dx} = -3x^2y$. El problema al que nos enfrentamos ahora no es el de calcular derivadas de funciones; más bien, el problema consiste en: si se da una ecuación como $\frac{dy}{dx} = -3x^2y$, hallar de alguna manera una función $y = f(x)$ que satisfaga dicha ecuación. En una palabra, se desea *resolver* ecuaciones diferenciales.

La forma de ecuación diferencial más sencilla que puede pensarse es $\frac{dy}{dx} = f(x)$. Resolverla consiste en encontrar una función cuya derivada sea $f(x)$, es decir, encontrar las primitivas (integrales indefinidas) de $f(x)$. Por tanto, podemos decir que los métodos de resolución de ecuaciones diferenciales constituyen una generalización del cálculo de primitivas.

**Definición 1.** *Llamamos* ***ecuación diferencial*** *(E. D.) a una ecuación que relaciona una función (o variable dependiente), su variable o variables (variables independientes), y sus derivadas. Si la ecuación contiene derivadas respecto a una sola variable independiente entonces se dice que es una* ***ecuación diferencial ordinaria*** *(E. D. O.); y si contiene las derivadas parciales respecto a dos o más variables independientes se llama* ***ecuación en derivadas parciales*** *(E. D. P.).*

Ejemplos de ecuaciones diferenciales ordinarias son

$$\frac{dy}{dx} - 4y = 2, \qquad (x + 2y)\,dx - 3y\,dy = 0 \tag{1}$$

y

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 3y = 0; \tag{2}$$

mientras que

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = u \tag{3}$$

y

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 4\frac{\partial u}{\partial t} \tag{4}$$

son ecuaciones en derivadas parciales.

Otro tipo de ecuaciones que pueden estudiarse son las *ecuaciones diferenciales de retraso* (o *retardo*), como es el caso de

$$u'(t) = 7 - 2u(t-3).$$

Están caracterizadas por la presencia de un desplazamiento $t - t_0$ en el argumento de la función incógnita $u(t)$. En general, son más difíciles de manejar que las E. D. sin retraso. No nos ocuparemos aquí de ellas.

**Definición 2.** *Se llama* ***orden*** *de la ecuación diferencial al orden de la derivada o derivada parcial más alta que aparece en la ecuación.*

Así, por ejemplo, las ecuaciones (1) y (3) son de orden 1, (2) es de orden 2 y (4) de orden 3.

En lo que sigue nos preocuparemos sólo de ecuaciones diferenciales ordinarias y, como no habrá lugar a confusión, las denominaremos simplemente E. D. Por lo general, salvo que el contexto nos indique otra notación (o ésta provenga de los cambios de variable que efectuemos), utilizaremos $x$ para denotar la variable independiente e $y$ para la variable dependiente.

**Definición 3.** *Decimos que una ecuación diferencial (de orden $n$) está expresada en forma* ***implícita*** *cuando tiene la forma*

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

*siendo $F$ una función $F\colon \Omega \subset \mathbb{R}^{n+2} \longrightarrow \mathbb{R}$ con $\Omega$ un subconjunto (generalmente abierto) de $\mathbb{R}^{n+2}$. Y decimos que está expresada en forma* ***explícita*** *cuando tenemos*

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

*con $f\colon D \subset \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función definida en un subconjunto $D$ (generalmente abierto) de $\mathbb{R}^{n+1}$.*

Una clase importante de E. D., bien estudiada y con buenas propiedades, es la siguiente:

**Definición 4.** *Se dice que una ecuación diferencial es* ***lineal*** *si tiene la forma*

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x);$$

*y se llama* ***lineal homogénea*** *si, además, $g(x) = 0$. Dada una ecuación lineal, su correspondiente ecuación lineal homogénea en la que se ha hecho $g(x) = 0$ se denomina* ***lineal homogénea asociada****. Una ecuación que no es lineal se dice* ***no lineal****.*

Nuestro objetivo es resolver ecuaciones diferenciales, esto es, encontrar sus soluciones.

**Definición 5.** *Decimos que una función* $y = \varphi(x)$ *definida en un intervalo* $I$ *(es decir,* $\varphi\colon I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$*) es* ***solución*** *de una ecuación diferencial en el intervalo si, sustituida en dicha ecuación, la reduce a una identidad. (En otras palabras, si satisface la E. D.) Una E. D. se dice* ***resoluble*** *(o* ***integrable****)* ***por cuadraturas*** *si su solución es expresable mediante integrales.*

En general, la solución de una ecuación diferencial de orden $n$ dependerá de $n$ parámetros. Pero incluso de esta forma pueden no obtenerse todas las soluciones de una E. D. Por ejemplo, cuando tenemos una familia uniparamétrica de soluciones de una E. D., una sencilla interpretación geométrica nos muestra que también la envolvente de la familia de curvas (si existe) es solución de la E. D.

A continuación, nos dedicaremos a explicar los diversos métodos clásicos de resolución de E. D. No haremos hincapié en el intervalo de definición de las soluciones, ni efectuaremos un estudio detallado de la rigurosidad de los métodos empleados que, en esencia, descansan siempre en la regla de la cadena y los teoremas de la función inversa y de la función implícita. No nos detendremos nunca en comprobar las hipótesis de estos teoremas, sino que supondremos en todo momento que las funciones que aparecen en los métodos descritos son lo suficientemente «buenas», o están lo suficientemente restringidas en su dominio, para que siempre se satisfagan las hipótesis necesarias. Tampoco nos preocuparemos en exceso de saber si hemos obtenido todas las soluciones; a este respecto, en algunos casos nos interesaremos por las *soluciones singulares* de una E. D., como puede ser la envolvente de una familia de soluciones.

Nos apresuramos a señalar que las fórmulas generales que aparecen como solución de diversos tipos de ecuaciones no deben memorizarse; más bien, el procedimiento debe desarrollarse completo cada vez. Para ello bastará recordar unos cuantos puntos esenciales que destacamos en las cajas de texto que hemos denominado «recetas».

Por último, comentar que, en los ejemplos que nos aparecerán, el lector puede entretenerse en representar gráficamente las soluciones de las E. D. planteadas, al menos en los casos más sencillos o efectuando un simple bosquejo de su apariencia. No pensemos en esto como una pérdida de tiempo, pues ayuda a comprender la naturaleza del problema y de sus soluciones.

# ECUACIONES EXPLÍCITAS DE PRIMER ORDEN

Son las que tienen la forma

$$y' = f(x, y).$$

## APARTADO 1.

### Variables separadas.

Si tenemos la E. D.

$$g(x) = h(y)y',$$

formalmente, podemos poner $g(x)\,dx = h(y)\,dy$; si suponemos que $G$ es una primitiva de $g$ y $H$ una de $h$, tendremos $G'(x)\,dx = H'(y)\,dy$ e, integrando, $G(x) = H(y) + C$, que es la solución general de la ecuación.

Expliquemos con un poco más de rigor por qué funciona el método: Sea $y = \varphi(x)$ una solución de la E. D., es decir, $\varphi(x)$ debe cumplir $g(x) = h(\varphi(x))\varphi'(x)$. Pero $H$ es una primitiva de $h$, así que, por la regla de la cadena, $g(x) = h(\varphi(x))\varphi'(x) = (H \circ \varphi)'(x)$. Integrando, $G(x) = (H \circ \varphi)(x) + C$ (lo que antes hemos expresado como $G(x) = H(y) + C$), de donde $\varphi(x) = H^{-1}(G(x) - C)$.

En los pasos anteriores, está justificado emplear la regla de la cadena cuando $\varphi$ y $H$ son derivables, lo cual es cierto sin más que suponer que $h$ sea continua. Y finalmente, para poder despejar $\varphi$ mediante el uso de $H^{-1}$ bastaría con exigir además que $h$ no se anulara en el intervalo de definición, con lo cual, como $H' = h \neq 0$, $H$ es creciente o decreciente luego existe $H^{-1}$ (en otras palabras, como la derivada de $H$ no se anula, el teorema de la función inversa nos asegura que existe $H^{-1}$).

Las ecuaciones en variables separadas son las más sencillas de integrar y, a la vez, las más importantes, ya que cualquier otro método de resolución se basa esencialmente en aplicar diversos trucos para llegar a una ecuación en variables separadas. En ellas hemos visto, con todo rigor, qué hipótesis hay que imponer para que el método que conduce a la solución esté correctamente empleado, y cómo se justifica el funcionamiento del proceso. A partir de ahora no incidiremos más en estos detalles que, aunque importantes, sobrecargarían la explicación. El lector puede detenerse mentalmente a pensar en ellos, justificando adecuadamente los pasos que se efectúen.

En cualquier caso, conviene recordar que la expresión $\frac{dy}{dx}$ es simplemente una útil notación para designar la derivada de $y$ respecto de $x$, no un cociente de $dy$ dividido por $dx$; ni $dy$ ni $dx$ tienen entidad en sí mismas. Esta notación se emplea, no porque sí ni para introducir confusión, sino que, al contrario, se usa porque es consecuente con los enunciados de varios importantes resultados. Ya hemos visto cómo resulta adecuada a la hora de recordar cómo resolver ecuaciones en variables separadas $g(x) = h(y)\,\frac{dy}{dx}$, descomponiendo $g(x)\,dx = h(x)\,dy$ (como si $\frac{dy}{dx}$ fuese realmente una fracción) e integrando ambos lados de la expresión anterior. Pero no sólo aquí se pone de manifiesto la utilidad de esta notación. Por ejemplo, el teorema de la función inversa prueba (con las hipótesis adecuadas) que, cuando $y$ es una función de $x$, si se despeja $x$ como función de $y$ se cumple

$$x'(y) = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx} = \frac{1}{y'(x)},$$

es decir, se produce un comportamiento similar a si estuviéramos operando con fracciones. Análogamente, si tenemos que $z$ es una función de $y$ y, a su vez, $y$ una función de $x$, la regla de la cadena establece que la derivada de la función compuesta $z(x)$ es

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\,\frac{dy}{dx},$$

que es como si simplificáramos $dy$ en los supuestos cocientes de la derecha. Esto permite usar las notaciones del tipo $\frac{dy}{dx}$ y su comportamiento como si fuesen fracciones como regla nemotécnica de los resultados anteriores.

**RECETA 1. Variables separadas.**

Son de la forma

$$g(x) = h(y)y'.$$

Formalmente, se separa $g(x) = h(y)\,\frac{dy}{dx}$ en $g(x)\,dx = h(y)\,dy$ y se integra.

**Ejemplo 1.** Resolver

$$\frac{dy}{dx} + (\operatorname{sen} x)y = 0.$$

Despejando, $\frac{dy}{y} = -(\operatorname{sen} x)\,dx$ e, integrando, $\log y = \cos x + C$, es decir, $y = e^{\cos x + C}$. Sin más que tomar $K = e^C$ encontramos las soluciones $y = Ke^{\cos x}$. Fijarse que, en principio, parece que $K$ tiene que ser positiva; pero en realidad la integral de $\frac{dy}{y}$ es $\log|y|$, lo que nos llevaría a soluciones con valores negativos de $K$. Por último, notar $y = 0$ (es decir, tomar $K = 0$) también es claramente una solución de la E. D., aunque no se obtiene con el método seguido. Así pues, la solución general de la E. D. es de la forma $y = Ke^{\cos x}$ con $K \in \mathbb{R}$.

## APARTADO 2.

**Ecuación de la forma $y' = f(ax + by)$.**

Si $a = 0$ o $b = 0$, la ecuación es separable. En otro caso, efectuemos el cambio de función $y(x)$ por $z(x)$ dado por $z = ax + by$, de donde $z' = a + by'$ y, por tanto, $y' = \frac{z'-a}{b}$. Entonces, sustituyendo en la E. D. obtenemos $\frac{z'-a}{b} = f(z)$, es decir, $z' = a + bf(z)$, que es de variables separadas. La escribimos como

$$dx = \frac{dz}{a + bf(z)},$$

con lo que, integrando, $x = \int (a + bf(z))^{-1}\, dz = \phi(z, C)$. Así pues, las soluciones de la E. D. de partida serán

$$x = \phi(ax + by, C),$$

de modo que hemos encontrado $y$ como función de $x$ expresada en forma implícita.

> **RECETA 2. Ecuación de la forma $y' = f(ax + by)$.**
> El cambio de función $y(x)$ por $z(x)$ dado por $z = ax + by$ la transforma en una de variables separadas.

**Ejemplo 2.** Resolver

$$y' - e^x e^y = -1.$$

Tenemos $y' + 1 = e^{x+y}$, con lo que si efectuamos el cambio de función dado por la sustitución $z = x + y$, la ecuación queda transformada en $z' = e^z$, es decir, $dx = e^{-z}\, dz$, ecuación en variables separadas cuya solución es $x = -e^{-z} + C$. Volviendo a las variables iniciales, $C - x = e^{-x-y}$, de donde $\log(C - x) = -x - y$, y por tanto la solución de la E. D. de partida es $y = -\log(C - x) - x$. (Observar que no nos hemos preocupado —ni lo haremos de aquí en adelante— de poner módulos cuando al calcular una integral aparece un logaritmo. El lector podría analizar estos casos con mucho más cuidado.)

## APARTADO 3.

**Homogéneas.**

Supongamos que tenemos la ecuación

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Para resolverla, hacemos el cambio de función $y(x)$ por $u(x)$ mediante $u = \frac{y}{x}$. Así, derivando $y = ux$ tenemos $y' = u'x + u$, es decir, $u'x + u = f(u)$. Esta ecuación, que podemos poner como $u'x = f(u) - u$, es de variables separadas. Vamos a solucionarla:

• Si $f(u) \neq u$, podemos escribir $\frac{du}{f(u)-u} = \frac{dx}{x}$ e, integrando, $\int \frac{du}{f(u)-u} = \log(\frac{x}{C})$. Despejando $x$ obtenemos $x = Ce^{\phi(u)}$ con $\phi(u) = \int \frac{du}{f(u)-u}$. Por tanto, las curvas con ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = Ce^{\phi(u)} \\ y = Cue^{\phi(u)} \end{cases}$$

son solución de la ecuación diferencial para cada $C \in \mathbb{R}$. (Esto constituye una familia de curvas homotéticas: una curva se obtiene de otra mediante una homotecia, es decir, multiplicando los valores de $x$ e $y$ por una constante.) A veces, es conveniente expresar estas soluciones de otras formas. Siempre puede ponerse $x = Ce^{\phi(y/x)}$, solución dada mediante una función implícita. Y, cuando en $x = Ce^{\phi(u)}$ se logra despejar de alguna forma $u = H(x, C)$, la solución de la E. D. queda mucho más sencilla: $y = xH(x, C)$.

• Supongamos ahora que existe algún $u_0$ tal que $f(u_0) = u_0$. En este caso, es inmediato comprobar que la recta $y = u_0 x$ es solución: $y' = u_0 = f(u_0) = f(\frac{y}{x})$, luego se satisface la ecuación diferencial. Este tipo de soluciones que no se obtienen con el procedimiento general suelen denominarse soluciones singulares.

**Nota:** En general, una función $h(x, y)$ se dice *homogénea* de grado $\alpha$ si $h(\lambda x, \lambda y) = \lambda^\alpha h(x, y)$. Es inmediato comprobar que una E. D. de la forma

$$P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = 0$$

con $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ funciones homogéneas del mismo grado es, efectivamente, una ecuación diferencial homogénea (despejar $y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)} = -\frac{P(x,x(y/x))}{Q(x,x(y/x))}$ y extraer $\lambda = x$ de $P$ y $Q$). De aquí proviene el nombre de este tipo de ecuaciones.

**RECETA 3. Homogéneas.**

Son de la forma

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Se hace el cambio de función $y(x)$ por $u(x)$ mediante $y = ux$, transformándose así la E. D. en una de variables separadas.

**Ejemplo 3.** Resolver

$$y' = \frac{2xy - y^2}{x^2}.$$

Con el cambio $y = ux$ podemos poner $y' = 2\frac{y}{x} - (\frac{y}{x})^2 = 2u - u^2$. Como $y' = u'x + u$, sustituyendo tenemos $u'x + u = 2u - u^2$, es decir, $xu' = u - u^2$.

Si $u \neq u^2$, podemos poner $\frac{du}{u-u^2} = \frac{dx}{x}$. Para integrar, descomponemos $\frac{1}{u-u^2} = \frac{A}{u} + \frac{B}{1-u}$, lo que se satisface para $A = B = 1$. Entonces, integrando, $\log u - \log(1-u) = \log\frac{x}{C}$, es decir, $\frac{u}{1-u} = \frac{x}{C}$; y sustituyendo $u = \frac{y}{x}$ tenemos $\frac{y/x}{1-y/x} = \frac{x}{C}$, de donde $Cy = x(x-y)$. De aquí es fácil despejar explícitamente $y$ si así se desea.

Por otra parte, a partir de $u_0 = 0$ y $u_0 = 1$ (para las cuales $u = u^2$), se tienen las soluciones singulares $y = 0$ e $y = x$.

## APARTADO 3′.

### Reducibles a homogéneas.

Consideremos la ecuación

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{ax + by + c}\right).$$

Para resolverla, hay que distinguir dos casos:

**3′.1**. Supongamos en primer lugar que las rectas $ax + by + c = 0$ y $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ se cortan en el punto $(x_0, y_0)$. Así, tendremos que $ax + by + c = a(x - x_0) + b(y - y_0)$ y $a_1x + b_1y + c_1 = a_1(x - x_0) + b_1(y - y_0)$. Hagamos ahora el cambio de variable y de función $X = x - x_0$, $Y = y - y_0$, con lo cual

$$Y' = y' = f\left(\frac{a_1(x-x_0) + b_1(y-y_0)}{a(x-x_0) + b(y-y_0)}\right) = f\left(\frac{a_1X + b_1Y}{aX + bY}\right) = f\left(\frac{a_1 + b_1\frac{Y}{X}}{a + b\frac{Y}{X}}\right),$$

es decir, hemos reducido la ecuación a una homogénea.

**3′.2**. En segundo lugar, supongamos que $ax+by+c = 0$ y $a_1x+b_1y+c_1 = 0$ son rectas paralelas, con lo cual podrá ponerse $(a_1, b_1) = K(a, b)$ para algún $K \in \mathbb{R}$. Efectuemos ahora el cambio de función $z = ax + by$. Derivando, $z' = a + by'$, o sea, $y' = \frac{z'-a}{b}$. Si sustituimos en la E. D. original obtenemos

$$\frac{dz}{dx} = a + bf\left(\frac{Kz + c_1}{z + c}\right),$$

que es de variables separadas.

**RECETA 3′. Reducibles a homogéneas.**

Son de la forma

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{ax + by + c}\right).$$

**3′.1.** Si las rectas $ax + by + c = 0$ y $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ se cortan en $(x_0, y_0)$, se hace el cambio de variable y de función $X = x - x_0$, $Y = y - y_0$. La ecuación se reduce a una homogénea.

**3′.2.** Si $ax+by+c = 0$ y $a_1x+b_1y+c_1 = 0$ son rectas paralelas, se hace el cambio de función $z = ax + by$. La nueva ecuación que aparece es de variables separadas.

**Ejemplo 3′.1.** Resolver

$$y' = \frac{-2x + 4y - 6}{x + y - 3}.$$

Las rectas $-2x + 4y - 6 = 0$ y $x + y - 3 = 0$ se cortan en el punto $(x, y) = (1, 2)$, con lo que efectuamos el cambio $X = x - 1$, $Y = y - 2$, $Y' = y'$. Sustituyendo, obtenemos la ecuación homogénea

$$Y' = \frac{-2X + 4Y}{X + Y} = \frac{-2 + 4Y/X}{1 + Y/X}.$$

Para resolverla, hacemos un nuevo cambio $u = Y/X$, de donde $Y = uX$, $Y' = u'X + u$. Tras sustituir, tenemos $u'X + u = \frac{-2+4u}{1+u}$ que, a la postre, podemos poner como $-X\frac{du}{dX} = \frac{u^2-3u+2}{u+1}$.

Tenemos ahora que distinguir cuándo, y cuándo no, se anula la expresión $u^2 - 3u + 2$. Resolviendo $u^2 - 3u + 2 = 0$, esto ocurre para $u = 1$ y $u = 2$.

Analicemos en primer lugar el caso $u^2 - 3u + 2 \neq 0$. Así, podemos escribir

$$\frac{dX}{X} = \frac{-(u + 1)\, du}{u^2 - 3u + 2} = \frac{A}{u - 1}\, du + \frac{B}{u - 2}\, du = \frac{2}{u - 1}\, du - \frac{3}{u - 2}\, du$$

de donde, integrando, $2\log(u - 1) - 3\log(u - 2) = \log(KX)$ y, consiguientemente, $\frac{(u-1)^2}{(u-2)^3} = KX$. Sustituyendo ahora $u = Y/X$ llegamos fácilmente a $(Y-X)^2 = K(Y-2X)^3$; y volviendo a las variables originales $x$ e $y$ obtenemos las soluciones $(y-x-1)^2 = K(y-2x)^3$ de la E. D. de partida.

Finalmente, con $u_0 = 1$ y $u_0 = 2$ tenemos, respectivamente, las soluciones $Y = X$ e $Y = 2X$ que, sustituyendo $X$ e $Y$ por su valor, se traducen en $y = x + 1$ y $y = 2x$.

**Ejemplo 3′.2.** Resolver

$$y' = \frac{x-y-1}{x-y-2}.$$

Efectuamos el cambio de función $z = x - y$, de donde $z' = 1 - y'$. Sustituyendo, tenemos $-z' + 1 = \frac{z-1}{z-2}$, y consiguientemente $-\frac{dz}{dx} = \frac{z-1}{z-2} - 1 = \frac{1}{z-2}$, que es la ecuación $(z-2)\,dz = -dx$, cuyas variables están separadas. Integrando, $\frac{1}{2}(z-2)^2 = -x + K$, y finalmente, sustituyendo de nuevo $z = x - y$ y denotando $C = 2K$, obtenemos que las soluciones de la E. D. original son $(x-y-2)^2 + 2x = C$.

## APARTADO 3′′.

**Homogéneas implícitas.**

Sea la ecuación

$$F\left(\frac{y}{x}, y'\right) = 0.$$

Para resolverla, consideremos la curva $F(\alpha, \beta) = 0$ y supongamos que hemos logrado encontrar una representación paramétrica de la curva dada por $\alpha = \varphi(t)$, $\beta = \psi(t)$. Es decir, que se verifica $F(\varphi(t), \psi(t)) = 0$. Hagamos ahora el cambio de función $y$ por $t$ mediante $\frac{y}{x} = \varphi(t)$, teniendo en cuenta que $y' = \psi(t)$.

Si derivamos $y = x\varphi(t)$ respecto de $x$ tenemos $y' = \varphi(t) + x\varphi'(t)\frac{dt}{dx}$, es decir, $\psi(t) = \varphi(t) + x\varphi'(t)\frac{dt}{dx}$, o

$$\psi(t) - \varphi(t) = x\varphi'(t)\frac{dt}{dx}$$

que, en principio, es una ecuación en variables separadas.

• Si $\psi(t) \neq \varphi(t)$, podemos poner $\frac{\varphi'(t)\,dt}{\psi(t)-\varphi(t)} = \frac{dx}{x}$, cuya solución será $x = Ce^{\phi(t)}$ con $\phi(t) = \int \frac{\varphi'(t)\,dt}{\psi(t)-\varphi(t)}$. De aquí que la E. D. de partida tiene las soluciones

$$\begin{cases} x = Ce^{\phi(t)} \\ y = C\varphi(t)e^{\phi(t)} \end{cases}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

• Si existe $t_0$ tal que $\psi(t_0) = \varphi(t_0)$, formalmente, podemos pensar $0 = x\varphi'(t)\frac{dt}{dx}$, luego $\varphi'(t) = 0$ y por tanto $\varphi(t) = \text{cte.} = \varphi(t_0)$, lo que nos llevaría a la solución $y = x\varphi(t_0)$. Esta recta es, efectivamente, una solución de la E. D., como podemos comprobar directamente: $F(\frac{y}{x}, y') = F(\varphi(t_0), \varphi(t_0)) = F(\varphi(t_0), \psi(t_0)) = 0$.

**RECETA 3″. Homogéneas implícitas.**

Son de la forma

$$F\left(\frac{y}{x}, y'\right) = 0.$$

Consideramos la curva $F(\alpha, \beta) = 0$. Si encontramos una representación paramétrica $\alpha = \varphi(t)$, $\beta = \psi(t)$, $F(\varphi(t), \psi(t)) = 0$, se hace el cambio de función $y$ por $t$ mediante $\frac{y}{x} = \varphi(t)$, $y' = \psi(t)$. Así, derivando $y = x\varphi(t)$ respecto de $x$, aparece una ecuación en variables separadas.

**Ejemplo 3″**. Resolver

$$x^2(y')^2 - (y^2 + x^2) = 0.$$

Si ponemos la ecuación en la forma $(y')^2 - (\frac{y}{x})^2 = 1$, podemos recordar que el coseno y el seno hiperbólicos satisfacen la relación $(\operatorname{ch} t)^2 - (\operatorname{sh} t)^2 = 1$, lo que se adecúa a nuestras necesidades. Así, tomemos ahora $\frac{y}{x} = \operatorname{sh} t$ y $y' = \operatorname{ch} t$. Si derivamos $y = x \operatorname{sh} t$ tenemos $y' = \operatorname{sh} t + x \operatorname{ch} t \, \frac{dt}{dx}$, o sea, $\operatorname{ch} t = \operatorname{sh} t + x \operatorname{ch} t \, \frac{dt}{dx}$. Despejando, $\frac{dx}{x} = \frac{\operatorname{ch} t}{\operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t} \, dt$ (notar que, en esta ecuación, el denominador no se anula nunca ya que $\operatorname{ch} t > \operatorname{sh} t$, luego no hay que preocuparse de analizar por separado las raíces de $\operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t = 0$) e, integrando, $x = Ce^{\phi(t)}$ con

$$\phi(t) = \int \frac{\operatorname{ch} t}{\operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t} \, dt = \int \frac{e^t + e^{-t}}{2e^{-t}} \, dt = \tfrac{1}{2} \int (1 + e^{2t}) \, dt = \tfrac{1}{2}t + \tfrac{1}{4}e^{2t}.$$

Entonces, la E. D. original tiene como soluciones las curvas

$$\begin{cases} x = Ce^{t/2 + e^{2t}/4} \\ y = C(\operatorname{sh} t)e^{t/2 + e^{2t}/4} \end{cases}.$$

## APARTADO 3‴.

**Sea la ecuación** $y' = f(x, y)$

con $f$ tal que, para algún $\alpha$ fijo, verifica

$$f(\lambda x, \lambda^\alpha y) = \lambda^{\alpha - 1} f(x, y).$$

Nótese en primer lugar que, cuando $\alpha = 0$, sin más que tomar $\lambda = x$ tenemos $y' = f(x, y) = x^{-1} f(1, y)$, que es una ecuación en variables separadas; y, cuando $\alpha = 1$, se puede poner

$$y' = f(x, y) = f\left(x, x\frac{y}{x}\right) = f\left(1, \frac{y}{x}\right),$$

es decir, nos encontramos ante una E. D. homogénea. En otro caso, veamos cómo el cambio de función $y = z^\alpha$ transforma la ecuación en una homogénea:

Derivando, $y' = \alpha z^{\alpha-1} z'$ y, sustituyendo en la E. D. original, $\alpha z^{\alpha-1} z' = f(x, z^\alpha)$, es decir,

$$z' = \frac{1}{\alpha}\Big(\frac{1}{z}\Big)^{\alpha-1} f(x, z^\alpha) = \frac{1}{\alpha} f\left(\frac{1}{z}x, \Big(\frac{1}{z}\Big)^\alpha z^\alpha\right) = \frac{1}{\alpha} f\left(\frac{x}{z}, 1\right)$$

que, efectivamente, es una E. D. homogénea.

Lógicamente, como, al hacer en la homogénea el cambio $z = ux$, ésta se transforma en una de variables separadas, si hubiéramos efectuado desde el principio el cambio $y = (ux)^\alpha$, nuestra E. D. se hubiera convertido directamente en una de variables separadas.

Por último comentar que, extrayendo $\lambda = x$, este tipo de ecuaciones puede ponerse como

$$y' = f(x, y) = f\left(x, x^\alpha \frac{y}{x^\alpha}\right) = x^{\alpha-1} f\left(1, \frac{y}{x^\alpha}\right) = x^{\alpha-1} h\left(\frac{y}{x^\alpha}\right).$$

Pero, al menos a simple vista, no parece más sencillo describir las ecuaciones que estamos tratando como «las que tienen la forma $y' = x^{\alpha-1} h(yx^{-\alpha})$» en lugar de como lo hemos hecho en este apartado.

**RECETA 3‴. Si la ecuación** $y' = f(x, y)$ es tal que, para algún $\alpha \neq 0$ fijo, $f$ satisface

$$f(\lambda x, \lambda^\alpha y) = \lambda^{\alpha-1} f(x, y),$$

entonces el cambio de función $y = z^\alpha$ transforma la ecuación en una homogénea. (Si $\alpha = 1$, la E. D. ya es homogénea; y si $f$ cumple la relación anterior con $\alpha = 0$, la E. D. es de variables separadas.)

**Ejemplo 3‴.** Resolver

$$y' = \frac{1}{2}\frac{y}{x} - 3\frac{\sqrt{x}}{y^2}.$$

Dada $f(x, y) = \frac{1}{2}x^{-1}y - 3x^{1/2}y^{-2}$, para intentar encontrar $\alpha$ tanteamos $f(\lambda x, \lambda^\alpha y) = \frac{1}{2}(\lambda x)^{-1}(\lambda^\alpha y) - 3(\lambda x)^{1/2}(\lambda^\alpha y)^{-2} = \frac{1}{2}\lambda^{\alpha-1}x^{-1}y - 3\lambda^{1/2-2\alpha}x^{1/2}y^{-2}$, y observamos que esto es igual a $\lambda^{\alpha-1} f(x, y)$ sin más que tomar $\alpha = \frac{1}{2}$.

Entonces, si sustituimos $y = z^{1/2}$ en la E. D., tenemos $\frac{1}{2}z^{-1/2}z' = \frac{1}{2}x^{-1}z^{1/2} - 3x^{1/2}z^{-1}$, es decir, $z' = \frac{z}{x} - 6(\frac{z}{x})^{-1/2}$, que es homogénea. Para resolverla, tomamos ahora $z = ux$, con lo cual, sustituyendo, $u'x + u = u - 6u^{-1/2}$, o sea, $u^{1/2}\,du = -6x^{-1}\,dx$, ecuación en variables separadas. Integrándola, $\frac{2}{3}u^{3/2} = -6\log(\frac{x}{C})$, luego $x = C\exp(-u^{3/2}/9)$. Deshaciendo los cambios $z = ux$ y $y = ux$ encontramos que las soluciones de la E. D. de partida son, expresadas como curvas en paramétricas,

$$\begin{cases} x = Ce^{-u^{3/2}/9} \\ y = C^{1/2}u^{1/2}e^{-u^{3/2}/18} \end{cases}.$$

**APARTADO 4.**

**Ecuaciones exactas.**

Llamamos exacta a una ecuación diferencial

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0,$$

es decir, $y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$, que cumple $P_y = Q_x$ (con la notación $P_y = \frac{\partial P}{\partial y}$, $Q_x = \frac{\partial Q}{\partial x}$). Antes de explicar cómo resolverlas, comentemos brevemente algo sobre «expresiones diferenciales» (rigurosamente hablando, estamos tratando con 1-*formas diferenciales* $w = P\,dx + Q\,dy$, aunque no entraremos en ello):

Supongamos de antemano en todo lo que sigue que $P$ y $Q$ son de clase $\mathcal{C}^1$ (continuas con derivadas parciales continuas) en su dominio de definición (un abierto de $\mathbb{R}^2$). Una expresión diferencial $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ se dice que es una *diferencial cerrada* en una región $R$ del plano $xy$ si se verifica $P_y(x,y) = Q_x(x,y)$ para todo $(x,y) \in R$. Y se dice *exacta* en $R$ cuando existe alguna función $F(x,y)$ tal que $\frac{\partial F}{\partial x} = P$ y $\frac{\partial F}{\partial y} = Q$ para todo $(x,y) \in R$; en otras palabras, si la diferencial de $F$ es $dF = P\,dx + Q\,dy$ ($F$, que es única salvo constantes, se denomina *función potencial*). El teorema de Schwartz sobre igualdad de derivadas cruzadas nos asegura que cualquier expresión diferencial exacta es cerrada. Lo contrario no es cierto en general, aunque sí en una clase muy amplia de dominios de $\mathbb{R}^2$: los *simplemente conexos* que, intuitivamente, son los que no tienen agujeros. Demostrar este hecho no es excesivamente sencillo, pero tampoco es necesario para lo que aquí pretendemos. En realidad, el lema de Poincaré (que normalmente se prueba en cualquier curso de cálculo integral en varias variables) asegura que una expresión cerrada es exacta siempre que el dominio sea *estrellado*, lo que significa que exista un punto del dominio que se pueda unir a todos los demás mediante un segmento sin salirnos del dominio; en particular, los conjuntos convexos son estrellados. Además, esto asegura que, dada cualquier expresión cerrada, es exacta localmente, es decir, alrededor de cada punto podemos restringir el dominio de tal forma que la expresión sea exacta en ese nuevo dominio. Por lo tanto, en lo que a nosotros concierne, podemos identificar los conceptos de exacto y cerrado, ya que no nos estamos preocupando de dónde están definidas las E. D. que tratamos de resolver ni en qué intervalo existen las soluciones. En realidad, en ecuaciones diferenciales suele hablarse siempre de exacto aún refiriéndose a que se satisface la igualdad $P_y = Q_x$.

Una E. D. exacta es una expresión exacta igualada a cero. Veamos cómo resolverlas: si tenemos $P\,dx + Q\,dy = 0$ exacta, como existe $F$ tal que $dF = P\,dx + Q\,dy$, entonces la ecuación podemos ponerla en la forma $dF = 0$ y, por tanto, su solución será $F(x,y) = C$ (siendo $C$ constante arbitraria). Así pues, basta con que encontremos la función potencial $F$. El procedimiento para hallarla que, según veremos, funciona gracias a que $P_y = Q_x$, es como sigue:

Buscamos $F$ tal que $\frac{\partial F}{\partial x} = P$; así, es posible encontrar $F$ integrando $P(x,y)$ respecto a $x$ mientras se mantiene $y$ constante, es decir, $F(x,y) = \int P(x,y)\,dx + \varphi(y)$, donde la función arbitraria $\varphi(y)$ es la «constante» de integración. Derivando respecto de $y$ obtenemos

$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \int P(x,y)\,dx + \varphi'(y)$. Por otra parte, si utilizamos $\frac{\partial F}{\partial y} = Q$, de aquí resulta que $\varphi'(y) = Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y} \int P(x,y)\,dx$; ésta es realmente una expresión independiente de $x$ ya que

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)\,dx\Big) = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial}{\partial x}\int P(x,y)\,dx\Big) = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0.$$

Una vez conocida $\varphi'(y)$, integrando obtenemos $\varphi(y)$ y, sustituyendo su valor, llegamos a la función potencial $F(x,y)$. Así, quedan halladas completamente las soluciones buscadas $F(x,y) = C$, expresadas en forma implícita.

(Lógicamente, para encontrar $F$ podría haberse seguido el proceso anterior cambiando el orden en el que se usa $P$ y $Q$, partiendo de $\frac{\partial F}{\partial y} = Q$ y posteriormente utilizando $\frac{\partial F}{\partial x} = P$. Asimismo, integrando estas dos expresiones e igualándolas, muchas veces basta una simple inspección para determinar $F$.)

**RECETA 4. Ecuaciones exactas.**

Son las de la forma

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0,$$

es decir, $y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$, que cumplen $P_y = Q_x$. Se busca una función $F(x,y)$ tal que $dF = \omega = P\,dx + Q\,dy$, y la solución de la E. D. es $F(x,y) = C$ (siendo $C$ constante).

**Ejemplo 4**. Resolver

$$3y + e^x + (3x + \cos y)y' = 0.$$

Si ponemos la ecuación en la forma $P\,dx + Q\,dy = 0$ con $P(x,y) = 3y + e^x$ y $Q(x,y) = 3x + \cos y$, es claro que $P_y = Q_x = 3$, luego la E. D. es exacta. Calculemos la función potencial $F$ (que nos dará directamente las soluciones $F(x,y) = C$). Como $F_x = 3y + e^x$, integrando respecto de $x$, $F(x,y) = 3yx + e^x + \varphi(y)$. Derivando respecto de $y$ e igualando a $Q$ queda $3x + \varphi'(y) = 3x + \cos y$, es decir, $\varphi'(y) = \cos y$, de donde basta tomar $\varphi(y) = \operatorname{sen} y$, y por tanto $F(x,y) = 3yx + e^x + \operatorname{sen} y$. Así, la solución de la E. D. viene dada, implícitamente, por $3yx + e^x + \operatorname{sen} y = C$. (Nótese que al integrar $\varphi'(y) = \cos y$ no hace falta poner la constante de integración $\varphi(y) = \operatorname{sen} y + C_1$ ya que, en ese caso, una de las dos constantes de la solución $3yx + e^x + \operatorname{sen} y + C_1 = C$ sería claramente superflua.)

## APARTADO 4′.

**Reducibles a exactas: Factores integrantes.**

Si tenemos una ecuación $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$ que no es exacta, una idea para intentar resolverla sería tratar de encontrar alguna función $\mu(x,y)$ no idénticamente nula tal que

$$\mu(x,y)P(x,y)\,dx + \mu(x,y)Q(x,y)\,dy = 0$$

sea exacta. Como esta ecuación es equivalente a la de partida, sus soluciones y las de $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$ serán las mismas.

Desgraciadamente, no hay ningún procedimiento general que permita encontrar factores integrantes. Sin embargo, sí que es posible hacerlo, y de manera sencilla, en dos casos:

**4′.1**. Existencia de factor integrante de la forma $\mu(x)$. Queremos que $\mu(x)P(x,y)\,dx + \mu(x)Q(x,y)\,dy = 0$ sea exacta, esto es,

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu(x)P(x,y)) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu(x)Q(x,y)).$$

Derivando, $\mu(x)P_y(x,y) = \mu'(x)Q(x,y) + \mu(x)Q_x(x,y)$, o sea, $\mu(x)(P_y(x,y) - Q_x(x,y)) = \mu'(x)Q(x,y)$. Para que esto tenga sentido,

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = \frac{P_y(x,y) - Q_x(x,y)}{Q(x,y)}$$

tiene que resultar ser una función que dependa exclusivamente de $x$, que denotamos $h(x)$. Cuando éste es el caso, es claro que la función $\mu$ que satisface la relación anterior es

$$\mu(x) = \exp\left(\int h(x)\,dx\right),$$

con lo cual hemos encontrado el factor integrante buscado.

**4′.2**. Existencia de factor integrante de la forma $\mu(y)$. Repitiendo el proceso anterior buscamos $\frac{\partial}{\partial y}(\mu(y)P(x,y)) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu(y)Q(x,y))$, es decir, $\mu'(y)P + \mu(y)P_y = \mu(y)Q_x$, y por tanto $\frac{\mu'(y)}{\mu(y)} = \frac{Q_x - P_y}{P}$, que tiene que ser función sólo de $y$, que denotamos $h(y)$. En estas condiciones, el factor integrante es $\mu(y) = \exp(\int h(y)\,dy)$.

**4′.3**. Aparte de los casos anteriormente tratados, para algunos tipos de problemas se puede intentar encontrar factores integrantes imponiendo a $\mu(x,y)$ condiciones restrictivas de muy diverso tipo. Por ejemplo, exigiendo que sea de la forma $\mu(x,y) = x^\alpha y^\beta$ con $\alpha$ y $\beta$ constantes a determinar, que sea $\mu(x+y)$, o $\mu(xy)$, etc. Para estudiar estos casos, lo que hay que hacer siempre es igualar $\frac{\partial}{\partial y}(\mu P) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu Q)$ e intentar resolver la nueva ecuación que aparece, teniendo en cuenta, sobre todo, si tiene sentido. Por ser generalmente procedimientos bastante particulares, no comentaremos aquí nada más sobre ellos.

**RECETA 4′. Reducibles a exactas: Factores integrantes.**

Si $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$ no es exacta, podemos intentar encontrar $\mu(x,y)$ tal que

$$\mu(x,y)P(x,y)\,dx + \mu(x,y)Q(x,y)\,dy = 0$$

sea exacta.

**4′.1**. Existencia de factor integrante de la forma $\mu(x)$. Ocurre cuando $\frac{P_y - Q_x}{Q} = h(x)$, tomándose $\mu(x) = \exp(\int h(x)\,dx)$.

**4′.2**. Existencia de factor integrante de la forma $\mu(y)$. Ocurre cuando $\frac{Q_x - P_y}{P} = h(y)$, tomándose $\mu(y) = \exp(\int h(y)\,dy)$.

**4′.3**. Otras expresiones restrictivas para $\mu(x,y)$.

**Ejemplo 4′**. Resolver

$$(2x^2 + y)\,dx + (x^2y - x)\,dy = 0.$$

En este caso, $P(x,y) = 2x^2 + y$ y $Q(x,y) = x^2y - x$. Esta ecuación no es exacta ya que $P_y = 1$ y $Q_x = 2xy - 1$. Para intentar encontrar un factor integrante se calcula

$$\frac{P_y - Q_x}{Q} = \frac{1 - (2xy - 1)}{x^2y - x} = \frac{2(1 - xy)}{-x(1 - xy)} = \frac{-2}{x}.$$

Ya que se obtiene una expresión que depende sólo de $x$, podemos asegurar que existe un factor integrante dado por la fórmula $\mu(x) = \exp(\int \frac{-2}{x}\,dx) = x^{-2}$. Entonces, si multiplicamos la E. D. por $\mu(x) = x^{-2}$ se obtiene la ecuación exacta $(2 + yx^{-2})\,dx + (y - x^{-1})\,dy = 0$. Por el método usual, encontramos que la función $F$ tal que $F_x = 2 + yx^{-2}$ y $F_y = y - x^{-1}$ es $F(x,y) = 2x - yx^{-1} + \frac{1}{2}y^2$. Por tanto, la solución de la E. D. exacta, y también de la de partida, resulta ser $2x - yx^{-1} + \frac{1}{2}y^2 = C$.

## APARTADO 5.

### Ecuaciones lineales de primer orden.

Dada la ecuación

$$y' + a(x)y = b(x),$$

vamos a explicar cómo resolverla por tres métodos distintos:

$(i)$ Encontrar un factor integrante de la forma $\mu(x)$. Para ello, si la ponemos en la forma $(a(x)y - b(x))\,dx + dy = 0$ y denotamos $P(x,y) = a(x)y - b(x)$ y $Q(x,y) = 1$, se tiene $\frac{P_y - Q_x}{Q} = a(x)$. Por tanto, según hemos visto anteriormente, la E. D. tiene el factor integrante $\mu(x) = \exp(\int a(x)\,dx)$. Así, multiplicando por $\mu(x)$, la ecuación

$$\exp\left(\int a(x)\,dx\right)(a(x)y - b(x))\,dx + \exp\left(\int a(x)\,dx\right)\,dy = 0$$

tiene que ser exacta. Ahora, bastará encontrar la función potencial $F$ con lo que la ecuación anterior podrá ponerse $dF = 0$ y su solución será $F(x, y) = C$. Busquemos $F$:

Como $F_y = \exp(\int a(x)\,dx)$, tendremos $F = y\exp(\int a(x)\,dx) + \varphi(x)$. Por otra parte, derivando esta $F$ respecto de $x$ y usando que $F_x = \exp(\int a(x)\,dx)(a(x)y - b(x))$ llegamos a

$$F_x = y\exp\left(\int a(x)\,dx\right)a(x) + \varphi'(x) = \exp\left(\int a(x)\,dx\right)(a(x)y - b(x)),$$

de donde $-b(x)\exp(\int a(x)\,dx) = \varphi'(x)$. Integrando, $\varphi(x) = -\int b(x)\exp(\int a(x)\,dx)\,dx$, luego $F = y\exp(\int a(x)\,dx) - \int b(x)\exp(\int a(x)\,dx)\,dx$ y la solución de la ecuación exacta (y de la lineal de partida) es, expresada en forma implícita,

$$y\exp\left(\int a(x)\,dx\right) - \int b(x)\exp\left(\int a(x)\,dx\right)dx = C.$$

Sin más que despejar $y$, tenemos que la solución de la ecuación lineal resulta ser

$$y = \exp\left(-\int a(x)\,dx\right)\left[\int b(x)\exp\left(\int a(x)\,dx\right)dx + C\right].$$

(*ii*) Un segundo método de resolución se basa en resolver previamente la ecuación lineal homogénea asociada $y' + a(x)y = 0$. Esta ecuación es de variables separadas, pues puede ponerse $\frac{dy}{y} = -a(x)\,dx$; su solución es $y = C\exp(-\int a(x)\,dx)$.

Apliquemos ahora el *método de variación de las constantes*, esto es, consideremos

$$y = C(x)\exp\left(-\int a(x)\,dx\right)$$

y vamos a ver cómo debe ser $C(x)$ para que se verifique $y' + a(x)y = b(x)$. Derivando, $y' = C'(x)\exp(-\int a(x)\,dx) - C(x)a(x)\exp(-\int a(x)\,dx)$ y, sustituyendo en la ecuación lineal,

$$C'(x)\exp\left(-\int a(x)\,dx\right) - C(x)a(x)\exp\left(-\int a(x)\,dx\right) + a(x)C(x)\exp\left(-\int a(x)\,dx\right) = b(x).$$

Dos de los sumandos anteriores se cancelan, de donde $C'(x) = b(x)\exp(\int a(x)\,dx)$ e, integrando,

$$C(x) = \int b(x)\exp\left(\int a(x)\,dx\right) + C.$$

Así, hemos llegado a la misma expresión para las soluciones que la que encontramos por el método anterior.

(*iii*) El tercer procedimiento de resolución parte de suponer que hemos encontrado, de alguna forma, una solución particular $y_p(x)$ de la E. D. lineal. Entonces, la solución general de la lineal es $y_p$ más la solución general de la lineal homogénea asociada, es decir,

$$y = y_p + C \exp\left(-\int a(x)\,dx\right)$$

es solución para todo $C \in \mathbb{R}$. La justificación de este hecho es sencilla. En efecto, basta comprobar que, si $y_p$ es solución de $y' + a(x)y = b(x)$ y $y$ lo es de $y' + a(x)y = 0$, entonces $y + y_p$ es solución de $y' + a(x)y = b(x)$, lo cual es claramente cierto:

$$(y + y_p)' + a(x)(y + y_p) = (y' + a(x)y) + (y_p' + a(x)y_p) = 0 + b(x) = b(x).$$

(*iv*) El último método de resolución de ecuaciones lineales que describimos consiste en efectuar una descomposición $y(x) = u(x)v(x)$ adecuada. Tomando $y$ de esa forma, si derivamos, $y' = u'v+uv'$, con lo cual, al sustituir en la ecuación, $u'v+uv'+a(x)uv = b(x)$. Sacando $u$ factor común, podemos escribir la expresión anterior como $u'v+(v'+a(x)v)u = b(x)$. Vamos ahora a elegir $v$ de tal forma que se anule el coeficiente de $u$, es decir, que satisfaga $v' + a(x)v = 0$. Ésta es una E. D. en variables separadas; resolviéndola, $\frac{v'}{v} = -a(x)$, con lo cual basta tomar $\log v = -\int a(x)\,dx$, es decir,

$$v(x) = \exp\left(-\int a(x)\,dx\right).$$

Con $v(x)$ esa función, la ecuación queda ahora $u'v = b(x)$, de donde $u' = b(x)v^{-1}$, es decir, $u'(x) = b(x)\exp(\int a(x)\,dx)$. Integrando,

$$u(x) = \int b(x) \exp\left(\int a(x)\,dx\right)\,dx + C.$$

Sin más que recomponer $y = u(x)v(x)$, con este procedimiento de nuevo encontramos la misma expresión para las soluciones de la E. D. lineal de partida.

Para concluir, comentemos una vez más que no hace falta recordar la fórmula que hemos obtenido para las soluciones de la ecuación lineal, sino que basta seguir en cada problema alguno de los procesos descritos. Generalmente, en opinión del que escribe, los que suelen conducir a la solución por un procedimiento más corto suelen ser el segundo y el cuarto. El tercero tiene, sobre todo, gran importancia teórica. Además, merece la pena destacar que el segundo y el tercero tienen su paralelismo a la hora de resolver ecuaciones lineales de orden superior (como veremos más adelante), mientras que los otros dos sólo se aplican a las de primer orden.

**Ejemplo 5**. Resolver

$$2xy' - 3y = 4x^2$$

por los cuatro métodos descritos.

**RECETA 5. Ecuaciones lineales de primer orden.**

Son de la forma
$$y' + a(x)y = b(x).$$

Hay tres métodos de resolución: ($i$) Encontrar un factor integrante de la forma $\mu(x)$. ($ii$) Resolver la ecuación lineal homogénea asociada $y' + a(x)y = 0$ (que es de variables separadas), cuya solución es $y = C\exp(-\int a(x)\,dx)$, y usar el método de variación de las constantes (esto es, cambiar $C$ por $C(x)$ en la expresión anterior y sustituir en la ecuación lineal). ($iii$) Encontrar de alguna forma una solución particular $y_p(x)$, con lo cual la solución general de la lineal es $y_p$ más la solución general de la homogénea asociada. ($iv$) Descomponer $y(x) = u(x)v(x)$, sustituir en la lineal, e igualar a 0 el coeficiente de $u$, resolviendo la ecuación que aparece ($v' + a(x)v = 0$, que es de variables separadas); tras esto, queda una ecuación en $u(x)$ de variables separadas.

De cualquier modo se obtiene que la solución general de la E. D. lineal es
$$y = \exp\left(-\int a(x)\,dx\right)\left[\int b(x)\exp\left(\int a(x)\,dx\right)dx + C\right].$$

($i$) Tenemos la ecuación lineal $y' - \frac{3}{2x}y = 2x$, es decir, $dy = (\frac{3}{2x}y + 2x)\,dx$, que es de la forma $P\,dx + Q\,dy = 0$ con $P(x,y) = \frac{-3}{2x}y - 2x$ y $Q(x,y) = 1$. Como $\frac{P_y - Q_x}{Q} = \frac{-3/(2x)-0}{1} = \frac{-3}{2x}$, existe el factor integrante $\mu(x) = \exp(\int \frac{-3}{2x}\,dx) = x^{-3/2}$. Así, la ecuación $(\frac{-3}{2}x^{-5/2}y - 2x^{-1/2})\,dx + x^{-3/2}\,dy = 0$ es exacta. La función potencial $F$ debe cumplir $F_y = x^{-3/2}$, luego $F = x^{-3/2}y + \varphi(x)$. Por otra parte, $F_x = \frac{-3}{2}x^{-5/2}y - 2x^{-1/2} = \frac{-3}{2}x^{-5/2}y + \varphi'(x)$, de donde $\varphi(x) = -2\int x^{-1/2}\,dx = -4x^{1/2}$. Por tanto, $F(x,y) = x^{-3/2}y - 4x^{1/2}$, y la solución de la E. D. es $x^{-3/2}y - 4x^{1/2} = C$, o sea $y = Cx^{3/2} + 4x^2$, $C \in \mathbb{R}$.

($ii$) La lineal homogénea asociada es $y' - \frac{3}{2x}y = 0$. Podemos ponerla como $\frac{dy}{y} = \frac{3\,dx}{2x}$, de variables separadas, cuya solución es $\log y = \frac{3}{2}\log x + K$, es decir, $y = Cx^{3/2}$. Empleemos ahora el método de variación de las constantes, para lo cual tomamos $y = C(x)x^{3/2}$. Derivando, $y' = C'(x)x^{3/2} + \frac{3}{2}C(x)x^{1/2}$ y, sustituyendo en E. D. de partida, $2x(C'(x)x^{3/2} + \frac{3}{2}C(x)x^{1/2}) - 3C(x)x^{3/2} = 4x^2$, esto es, $C'(x) = 2x^{-1/2}$. Integrando, $C(x) = 4x^{1/2} + K_1$ luego la solución de la lineal es $y = (4x^{1/2} + K_1)x^{3/2}$. Si empleamos de nuevo $C$ para denotar la constante, $y = Cx^{3/2} + 4x^2$, la misma expresión que hemos encontrado en ($i$).

($iii$) Primero, tratemos de hallar una solución particular de la ecuación lineal. Lo más

sencillo es intentar probar si existe alguna solución polinómica. Esto sólo sería posible con un polinomio de segundo grado, pues en otro caso no podrían cancelarse nunca todos los sumandos. Por tanto, vamos a tantear con polinomios de la forma $y = ax^2 + bx + c$. Derivando, $y' = 2ax+b$ y, sustituyendo en la ecuación, $2x(2ax+b)-3(ax^2+bx+c) = 4x^2$. Si igualamos los términos del mismo grado encontramos que esto se cumple con $a = 4$, $b = c = 0$. Así pues, una solución particular de la lineal es $y = 4x^2$. Por otra parte, y tal como ya hemos calculado en $(ii)$, la solución general de la homogénea asociada es $y = Cx^{3/2}$. En definitiva, de nuevo tenemos que la solución general de la lineal es $y = Cx^{3/2} + 4x^2$.

$(iv)$ Para resolver la ecuación lineal, descomponemos $y = u(x)v(x)$, de donde $y' = u'v + uv'$. Sustituyendo, $2x(u'v + uv') - 3uv = 4x^2$, es decir, $2xu'v + (2xv' - 3v)u = 4x^2$. Si igualamos a 0 el coeficiente de $u$ queda $2xv' - 3v = 0$, o sea $\frac{v'}{v} = \frac{3}{2x}$; integrando, $\log v = \frac{3}{2}\log x$, luego $v = x^{3/2}$. Con esto, la ecuación queda $2xu'x^{3/2} = 4x^2$, es decir, $u' = 2x^{-1/2}$, cuya solución es $u = 4x^{1/2} + C$. Sin más que recomponer $y = uv$ obtenemos $y = (4x^{1/2} + C)x^{3/2}$, la misma solución para la lineal que con los otros tres métodos.

## APARTADO 5′.

### Ecuación de Bernoulli.

Consideremos

$$y' + a(x)y + b(x)y^\alpha = 0.$$

Es claro que, si $\alpha = 0$, la E. D. anterior es lineal y, si $\alpha = 1$, es de variables separadas. En otro caso, veamos cómo resolverla:

Efectuemos el cambio de función $y^{1-\alpha} = z$, para el cual $(1-\alpha)y^{-\alpha}y' = z'$, es decir, $\frac{1}{y^\alpha}y' = \frac{z'}{1-\alpha}$. Sustituyendo en $\frac{1}{y^\alpha}y' + a(x)y^{1-\alpha} + b(x) = 0$ tenemos $\frac{z'}{1-\alpha} + a(x)z + b(x) = 0$, con lo que hemos transformado la ecuación de Bernoulli en la E. D. lineal $z' + (1-\alpha)a(x)z = (\alpha-1)b(x)$.

Puede seguirse un segundo método de resolución sin más que aplicar un procedimiento análogo al último de los que hemos visto para ecuaciones lineales. Partimos de la descoposición $y(x) = u(x)v(x)$. Derivando, $y' = u'v + uv'$ y, sustituyendo en la E. D., $u'v + uv' + a(x)uv + b(x)u^\alpha v^\alpha = 0$, que escribimos como $u'v + (v' + a(x)v)u + b(x)u^\alpha v^\alpha = 0$. Ahora, igualamos a 0 el coeficiente de $u$, con lo cual tenemos $v' + a(x)v = 0$, que es una ecuación en $v(x)$ de variables separadas; resolviéndola determinamos $v(x)$. Con esta $v$, la ecuación de la que partíamos ha quedado $u'v + b(x)u^\alpha v^\alpha = 0$, que es una ecuación en $u(x)$ de variables separadas. Resolviéndola encontramos $u(x)$, con lo que ya tenemos completamente solucionada la ecuación de Bernoulli.

**Ejemplo 5′.** Resolver

$$xy' + 2y + x^5y^3e^x = 0.$$

Puesta en la forma $y' + \frac{2}{x}y + x^4y^3e^x = 0$, es claro que la ecuación es de Bernoulli con $\alpha = 3$. Hacemos el cambio de función $y^{-2} = z$, para el cual $z' = -2y^{-3}y'$, es decir,

**RECETA 5′. Ecuación de Bernoulli.**

Es de la forma

$$y' + a(x)y + b(x)y^{\alpha} = 0.$$

Si $\alpha = 0$ es lineal, y si $\alpha = 1$, de variables separadas. En otro caso, se hace el cambio de función $y^{1-\alpha} = z$, con lo que la E. D. de Bernoulli se transforma en una lineal. Un segundo método de resolución es el siguiente: se descompone $y(x) = u(x)v(x)$ y se sustituye en la E. D., se iguala a 0 el coeficiente de $u$ (queda $v' + a(x)v = 0$, que es de variables separadas), lo que nos lleva a determinar $v$, apareciendo ahora una ecuación en $u(x)$ de variables separadas.

$\frac{y'}{y^3} = -\frac{z'}{2}$. Si sustituimos esto en $\frac{y'}{y^3} + \frac{2}{x}y^{-2} + x^4e^x = 0$ queda $z' - \frac{4}{x}z = 2x^4e^x$, que es lineal con $a(x) = \frac{-4}{x}$ y $b(x) = 2x^4e^x$.

Tal como sabemos, la solución de la ecuación lineal es $z = \exp\left(-\int a(x)\,dx\right) \times \left[\int b(x)\exp\left(\int a(x)\,dx\right)\,dx + C\right]$. Como $\int a(x)\,dx = \int \frac{-4}{x}\,dx = -4\log x = \log x^{-4}$, se sigue $z = x^4(\int \frac{2x^4e^x}{x^4}\,dx + C) = x^4(2e^x + C)$. Por tanto, la solución de la E. D. de Bernoulli es $y^{-2} = x^4(2e^x + C)$, es decir, $y = x^{-2}(2e^x + C)^{-1/2}$.

Resolvamos ahora la ecuación por el segundo procedimiento explicado. Tomamos $y = uv$, luego $y' = u'v + uv'$; sustituyendo, $x(u'v + uv') + 2uv + x^5u^3v^3e^x = 0$, es decir, $xu'v + (xv' + 2v)u + x^5u^3v^3e^x = 0$. Elijamos $v$ tal que $xv' + 2v = 0$, esto es, $\frac{dv}{v} = -\frac{2\,dx}{x}$, lo cual se consigue con $\log v = -2\log x$, o sea, $v = x^{-2}$. Así, tenemos la nueva ecuación $xu' + x^5u^3x^{-6}e^x = 0$, que puede escribirse como $-\frac{du}{u^3} = e^x\,dx$. Su solución es $\frac{1}{2u^2} = e^x + C/2$, es decir, $u = (2e^x + C)^{-1/2}$. Con todo esto, la solución de la ecuación de Bernoulli de la que partíamos es $y = x^{-2}(2e^x + C)^{-1/2}$. Lógicamente, hemos obtenido la misma que mediante el primer método.

## APARTADO 5″.

### Ecuación de Riccati.

Supongamos que tenemos la E. D.

$$y' + a(x)y + b(x)y^2 = c(x).$$

Para resolverla, tenemos que haber encontrado previamente una solución particular $y_p(x)$. Si éste es el caso, efectuamos el cambio de función $y = y_p + z$, con lo cual $y' = y_p' + z'$ y, sustituyendo, $y_p'+z'+a(x)(y_p+z)+b(x)(y_p^2+2y_pz+z^2) = c(x)$. Como $y_p'+a(x)y_p+b(x)y_p^2 = c(x)$ por ser $y_p$ solución particular, esa expresión queda $z' + a(x)z + b(x)z^2 + 2b(x)zy_p = 0$,

es decir, $z' + [a(x) + 2b(x)y_p(x)]z + b(x)z^2 = 0$, que es una E. D. de Bernoulli con $\alpha = 2$. (Nótese ahora que, como el cambio $z = u^{-1}$ en la de Bernoulli reduciría ésta a una lineal, el cambio directo $y = y_p + \frac{1}{u}$ transforma la ecuación de Riccati en una lineal de un solo paso.)

Existen diversos resultados interesantes sobre la ecuación de Riccati. Por ejemplo, si se conocen dos soluciones $y_1$ e $y_2$ suyas, el cambio de función $y = \frac{y_1 - vy_2}{1-v}$ lleva a que se pueda resolver la ecuación con una sola cuadratura: $v = C\exp(\int b(x)(y_2(x) - y_1(x))\,dx)$. Pero desafortunadamente, no hay ningún procedimiento general que permita obtener alguna solución particular, por lo que muchas veces las E. D. de Riccati no resultan integrables en términos de funciones elementales. A este respecto, resulta apropiado citar la ecuación especial de Riccati $y' + by^2 = cx^m$ con $b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$; se sabe que puede resolverse en términos finitos si y sólo si $m = -2$ o $m = \frac{-4k}{2k+1}$ para algún entero $k$.

**RECETA 5′′. Ecuación de Riccati.**

Es de la forma

$$y' + a(x)y + b(x)y^2 = c(x).$$

El método requiere haber encontrado previamente una solución particular $y_p(x)$. Si éste es el caso, haciendo el cambio de función $y = y_p + z$, la E. D. de Riccati se reduce a una de Bernoulli con $\alpha = 2$.

**Ejemplo 5′′.** Resolver

$$y' + y^2 = x^2 - 2x.$$

Un primer vistazo a la ecuación nos induce a pensar que, posiblemente, tenga como solución un polinomio de primer grado $y = ax + b$. Sustituyendo, $a + (ax + b)^2 = x^2 - 2x$, lo que, efectivamente, se satisface para $a = -1$ y $b = 1$. Por tanto, una solución particular es $y_p = -x + 1$. Si efectuamos el cambio de variable $y = -x + 1 + z$ (luego $y' = -1 + z'$) y sustituimos en la E. D., obtenemos, tras simplificar, $z' + (2 - 2x)z + z^2 = 0$, ecuación de Bernoulli con $\alpha = 2$. Haciendo el cambio $z = u^{-1}$ (de donde $u' = \frac{-1}{z^2}z'$), al sustituir en $\frac{-1}{z^2}z' + \frac{2x-2}{z} - 1 = 0$ aparece $u' + (2x - 2)u = 1$, que es una E. D. lineal con $a(x) = 2x - 2$ y $b(x) = 1$. La solución de esta última es

$$u = \exp\left(\textstyle\int (2 - 2x)\,dx\right) \left[\int \exp\left(\textstyle\int (2x - 2)\,dx\right) dx + C\right] = e^{2x - x^2}\left(\int e^{x^2 - 2x}\,dx + C\right).$$

Deshaciendo los cambios, $u = \frac{1}{z} = \frac{1}{y+x-1}$, luego

$$\frac{1}{y + x - 1} = e^{2x - x^2}\left(\int e^{x^2 - 2x}\,dx + C\right)$$

es la solución de la E. D. de Riccati. (De aquí puede despejarse $y$ si se desea, obteniéndose la solución explícitamente, pero la integral que aparece no puede resolverse en términos de funciones elementales.)

## APARTADO 6.

**Sustituciones.**

Supongamos que tenemos la E. D.

$$y' = f(x, y)$$

que tiene un aspecto diferente a cualquiera de las que ya se han estudiado. En ocasiones puede ocurrir que, sustituyendo una parte de la ecuación por una nueva variable, la E. D. aparentemente difícil de la que partíamos se transforme en una que puede resolverse con facilidad. Esto es, en esencia, encontrar un cambio de variables inteligente. Aunque no pueden darse reglas fijas sobre qué sustituciones usar, si es que hay alguna sustitución posible, vale la pena intentar algo cuando no se nos ocurre otro camino. Muchas veces, una sustitución muy simple puede ser suficiente.

**RECETA 6. Sustituciones.**

Cuando tenemos una E. D.

$$y' = f(x, y)$$

que no responde a alguno de los tipos estudiados hasta ahora, a veces una sustitución (en esencia, un cambio de variable) más o menos ingeniosa transforma la ecuación en una reconocible. Lógicamente, no puede darse una regla general pero, en todo caso, merece la pena intentar algo.

**Ejemplo 6.** Resolver

$$x\,\frac{dy}{dx} - y = 2\frac{x^3}{y}e^{y/x}.$$

La ecuación no es separable, ni homogénea, ni exacta, ni admite factores integrantes $\mu(x)$ o $\mu(y)$, ni, finalmente, es lineal, de Bernoulli o de Riccati. Sin embargo, si la ponemos en la forma $\frac{xy'-y}{x^2} = 2\frac{x}{y}e^{y/x}$, nos damos cuenta rápidamente que la derivada del exponente $y/x$ es el primer miembro $\frac{y'x-y}{x^2}$. Así, al efectuar el cambio de función dado por la sustitución $u = \frac{y}{x}$, la ecuación queda transformada en $u' = 2u^{-1}e^u$, es decir, $ue^{-u}\,du = 2\,dx$, ecuación en variables separadas. Integrando por partes resulta $-ue^{-u} - e^{-u} + C = 2x$, de donde $u + 1 = (C - 2x)e^u$. Volviendo a las variables iniciales, $\frac{y}{x} + 1 = (C - 2x)e^{y/x}$, y por tanto la solución de la E. D. de partida es, expresada en forma implícita, $y + x = x(C - 2x)e^{y/x}$.

# ECUACIONES EN LAS QUE
# LA DERIVADA APARECE IMPLÍCITAMENTE

Son las que tienen la forma

$$F(x, y, y') = 0.$$

**APARTADO 7.**

**$F$ algebraica en $y'$ de grado $n$.**

Supongamos que tenemos

$$(y')^n + a_1(x, y)(y')^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(x, y)y' + a_n(x, y) = 0.$$

Si pensamos en la expresión anterior como en un polinomio en $y'$ de grado $n$ igualado a cero, y logramos resolver la expresión algebraica, obtenemos las raíces $y' = f_i(x, y)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Es decir,

$$(y' - f_1(x, y))(y' - f_2(x, y)) \cdots (y' - f_n(x, y)) = 0.$$

Por lo tanto, las soluciones de la E. D. de partida serán las de cada una de las nuevas ecuaciones diferenciales $y' - f_i(x, y) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, que habrá que resolver. De esta forma obtenemos $n$ familias uniparamétricas de soluciones.

**RECETA 7. $F$ algebraica en $y'$ de grado $n$.**

Tenemos

$$(y')^n + a_1(x, y)(y')^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(x, y)y' + a_n(x, y) = 0.$$

Resolviéndolo como un polinomio en $y'$ de grado $n$ igualado a cero obtenemos

$$(y' - f_1(x, y))(y' - f_2(x, y)) \cdots (y' - f_n(x, y)) = 0.$$

Por tanto, las soluciones de la E. D. de partida serán las soluciones de cada una de las ecuaciones $y' - f_i(x, y) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

**Ejemplo 7**. Resolver

$$y^2((y')^2+1)=1.$$

Despejando $(y')^2$ queda $(y')^2=\frac{1-y^2}{y^2}$, cuyas soluciones algebraicas son $y'=\pm\frac{\sqrt{1-y^2}}{y}$. Vamos a resolver estas dos nuevas ecuaciones diferenciales a la vez (ambas son de variables separadas). Si las ponemos como $\pm\frac{y\,dy}{\sqrt{1-y^2}}=dx$, integrando, $\mp\sqrt{1-y^2}=x+C$. Si elevamos al cuadrado ambos términos, podemos expresar conjuntamente las dos familias de soluciones como $1-y^2=(x+C)^2$, es decir, $(x+C)^2+y^2=1$, que son las circunferencias con centro en el eje $x$ y radio 1.

Por último, es evidente que $y=1$ e $y=-1$ también son soluciones de la E. D., aunque no se encuentran entre las que acabamos de hallar. Si atendemos a la interpretación geométrica de las ecuaciones diferenciales, es lógico que estas dos rectas sean soluciones, ya que son las envolventes de la familia de circunferencias que satisfacen la E. D.

**Obtención de la envolvente de una familia de curvas.**

Recordemos qué es una envolvente: Dada una familia uniparamétrica de curvas $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in A}$ en el plano, la envolvente de la familia es una nueva curva $\varphi$ tal que, en cada punto de contacto de $\varphi$ con alguna de las $\varphi_\alpha$, la tangente de $\varphi$ y de $\varphi_\alpha$ es la misma.

• Supongamos en primer lugar que tenemos una familia de curvas expresadas implícitamente como $F(x,y,C)=0$ (es decir, para cada valor del parámetro $C$ aparece una curva de la familia). Las envolventes se obtienen eliminando $C$ del sistema

$$\begin{cases} F(x,y,C)=0 \\ F_C(x,y,C)=0 \end{cases},$$

donde con $F_C$ hemos denotado la derivada parcial de $F$ respecto a $C$.

En el caso de las circunferencias del ejemplo anterior tendríamos

$$\begin{cases} (x+C)^2+y^2=1 \\ 2(x+C)=0 \end{cases}.$$

Despejando en la segunda ecuación, $x=-C$ y, sustituyendo en la primera, $y^2=1$. Es decir, las envolventes son las rectas $y=\pm1$.

• En segundo lugar, supongamos que tenemos la familia de curvas en paramétricas

$$\begin{cases} x=x(t,C) \\ y=y(t,C) \end{cases}.$$

Las envolventes se obtienen despejando $C=C(t)$ en el jacobiano igualado a cero

$$\det\begin{pmatrix} x_C & y_C \\ x_t & y_t \end{pmatrix}=0$$

y sustituyendo en las ecuaciones paramétricas.

Realmente, con estos procedimientos no sólo aparecen las envolventes, sino también los lugares geométricos de *puntos singulares*, ya sea de puntos de retroceso, de puntos de inflexión o de cúspides. (En los puntos de retroceso no hay vector tangente, y surgen en el proceso anterior sea cual sea la parametrización de las curvas; en cambio, los puntos de inflexión y las cúspides pueden aparecer o no según sea la parametrización usada. Por ejemplo, nunca surgen al usar el parámetro arco. Por esta razón, a los primeros se les llama *puntos singulares esenciales* y, a los otros, *puntos singulares evitables*.) En todo caso, después de aplicar estos métodos, hay que comprobar siempre qué es lo que hemos encontrado.

## APARTADO 8.

**Ecuación de la forma $y = f(x, y')$.**

Como procedimiento general para intentar resolver este tipo de ecuaciones, tomamos $y' = p$ y derivamos $y = f(x, y')$ respecto de $x$, con lo cual tenemos

$$p = y' = f_x + f_{y'} \frac{dy'}{dx} = f_x(x, p) + f_{y'}(x, p)p'.$$

(Quizás resulte más sencillo interpretar esto como que derivamos $y = f(x, p)$ respecto de $x$, obteniéndose directamente $p = f_x + f_p p'$.) Cuando $f$ tiene la forma adecuada, la nueva ecuación $p = f_x(x, p) + f_p(x, p)p'$ que hemos encontrado puede ser de alguno de los tipos ya estudiados. Si éste es el caso, la resolvemos, obteniendo su solución $x = \phi(p, C)$. Entonces, la solución de la E. D. de partida será

$$\begin{cases} x = \phi(p, C) \\ y = f(\phi(p, C), p) \end{cases},$$

expresado como una familia de curvas en paramétricas. Puede resultar extraño pensar que el parámetro $p$ vale precisamente $\frac{dy}{dx}$; pero esto no importa en absoluto, sino que puede considerarse una simple curiosidad.

Sin embargo, no siempre ocurre, para una función $f$ genérica, que el proceso anterior conduzca a una ecuación reconocible. Esto sí que sucede en los tres casos que estudiamos a continuación:

**8.1**. Ecuación

$$y = f(y').$$

En este caso, como $f(x, y') = f(y')$, se tiene $f_x(x, p) = 0$, luego con el proceso descrito habremos obtenido la ecuación $p = f_p(p)p'$ o, lo que es lo mismo, $p = f'(p)p'$. Si $p \neq 0$, esto lo podemos poner como $dx = \frac{f'(p)}{p}\,dp$, que es de variables separadas. Integrándola, $x = \int \frac{f'(p)}{p}\,dp = \phi(p) + C$, y las soluciones de $y = f(y')$ serán las curvas

$$\begin{cases} x = \phi(p) + C \\ y = f(p) \end{cases}.$$

Notar, a la vista de su representación paramétrica, que todas ellas tienen la misma forma: se diferencian únicamente en un desplazamiento horizontal.

A partir de $p = 0$ obtenemos la solución constante $y = f(0)$ (al sustituir en la ecuación queda $f(0) = f(0)$). Gráficamente, esto es una recta envolvente de las demás soluciones.

### 8.2. Ecuación de Lagrange:

$$y + x\varphi(y') + \psi(y') = 0.$$

Si ponemos $y' = p$ y derivamos respecto de $x$ queda

$$p + \varphi(p) + x\varphi'(p)\,\frac{dp}{dx} + \psi'(p)\,\frac{dp}{dx} = 0$$

que, si lo preferimos, podemos escribir como $(p + \varphi(p))\,dx + x\varphi'(p)\,dp + \psi'(p)\,dp = 0$.

• Supongamos en primer lugar que $p + \varphi(p) \neq 0$. Entonces, podemos dividir por $p + \varphi(p)$, con lo que nos aparece la ecuación lineal

$$\frac{dx}{dp} + \frac{\varphi'(p)}{p + \varphi(p)}x + \frac{\psi'(p)}{p + \varphi(p)} = 0$$

en la que $x$ actúa como función y $p$ como variable. Si la resolvemos, obtendremos como solución $x = \phi(p, C)$. Con esto, habremos encontrado para la E. D. de Lagrange las soluciones

$$\begin{cases} x = \phi(p, C) \\ y = -\phi(p, C)\varphi(p) - \psi(p) \end{cases}$$

en forma de familia de curvas paramétricas.

• Supongamos ahora que existe algún $\lambda$ para el cual $\lambda + \varphi(\lambda) = 0$. Formalmente, tomamos $y' = \lambda$ y, sustituyendo en la E. D., $y + x\varphi(\lambda) + \psi(\lambda) = 0$, es decir, $y = \lambda x - \psi(\lambda)$. Esta recta es, efectivamente, solución de la ecuación de Lagrange, sin más que comprobar que la satisface: $\lambda x - \psi(\lambda) + x\varphi(\lambda) + \psi(\lambda) = 0$ pues $\lambda + \varphi(\lambda) = 0$. Estas rectas decimos que son las soluciones singulares de la ecuación. Además, recíprocamente, vamos a ver que si $y = \lambda x - \psi(\lambda)$ es solución de la E. D., entonces se cumple que $\lambda + \varphi(\lambda) = 0$. Para ello, no hay más que utilizar que $y = \lambda x - \psi(\lambda)$ satisface la ecuación, con lo cual deberá cumplirse $0 = \lambda x - \psi(\lambda) + x\varphi(\lambda) + \psi(\lambda) = (\lambda + \varphi(\lambda))x$, luego $\lambda + \varphi(\lambda) = 0$.

### 8.3. Ecuación de Clairaut:

$$y - xy' + \psi(y') = 0.$$

Éste es un caso particular de ecuación de Lagrange con $\varphi(y') = -y'$. Aquí, como $\varphi(\lambda) + \lambda = 0$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, no existen las soluciones que, en la ecuación de Lagrange, encontrábamos por el método general; sólo aparecen rectas. En realidad, tenemos ahora como soluciones de la E. D. toda la familia de rectas $y = \lambda x - \psi(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Vamos a ver que, además, existe una solución singular, la envolvente de este haz de rectas. Para ello, planteamos el sistema

$$\begin{cases} y = \lambda x - \psi(\lambda) \\ 0 = x - \psi'(\lambda) \end{cases}$$

en el que la segunda ecuación es la primera derivada respecto al parámetro $\lambda$. Para encontrar explícitamente la envolvente habría que despejar $\lambda$ en una de las dos ecuaciones y sustituir en la otra, lo cual no siempre es posible. Pero podemos dejar su ecuación paramétrica que, obviamente, será

$$\begin{cases} x = \psi'(\lambda) \\ y = \lambda\psi'(\lambda) - \psi(\lambda) \end{cases}.$$

Aparte de la consideración geométrica de que las rectas no tienen puntos de retroceso, cúspides o puntos de inflexión, realmente podemos garantizar que esta curva es una envolvente y no un lugar geométrico de puntos singulares. En efecto, en cada punto $(x(\lambda), y(\lambda))$ de la curva, esta interseca precisamente a la recta $y = \lambda x - \psi(\lambda)$ del haz; y la pendiente de esa recta en el punto de intersección (y en cualquier otro, de hecho), que es $\lambda$, coincide con la de la curva:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\lambda}{dx/d\lambda} = \frac{\psi'(\lambda) + \lambda\psi''(\lambda) - \psi'(\lambda)}{\psi''(\lambda)} = \lambda.$$

De paso, esto significa que las soluciones rectas son las tangentes de la solución singular.

Realmente, podemos hallar las soluciones de la ecuación de Clairaut sin necesidad de saber que es un caso particular de la ecuación de Lagrange cuyas soluciones son rectas y su envolvente. Para ello, tomamos $y' = p$ en la E. D. y derivamos la expresión $y - xp + \psi(p) = 0$ respecto de $x$, obteniendo $p - p - xp' + \psi'(p)p' = 0$, es decir, $(-x + \psi'(p))p' = 0$. De aquí, $p' = 0$ o $\psi'(p) = x$. En primer lugar, si suponemos $\frac{d^2y}{dx^2} = p' = 0$, tendremos $\frac{dy}{dx} = p = \lambda$ constante; sustituyendo en la E. D. encontramos la familia de soluciones rectas $y = \lambda x - \psi(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. En segundo lugar, si suponemos $\psi'(p) = x$, encontramos la solución dada paramétricamente por

$$\begin{cases} x = \psi'(p) \\ y = p\psi'(p) - \psi(p) \end{cases}$$

(donde, anecdóticamente, el parámetro $p$ coincide con $p = \frac{dy}{dx}$); ésta es la solución singular, la envolvente del haz de rectas.

**Ejemplo 8.1**. Resolver

$$y = (y')^2 + 2(y')^3.$$

Tomando $y' = p$ podemos poner $y = p^2 + 2p^3$. Derivando respecto de $x$ tenemos $y' = p = 2pp' + 6p^2p' = (2p + 6p^2)p'$, es decir, $p = (2 + 6p)pp'$. Para $p \neq 0$, simplificamos

**RECETA 8. Ecuación de la forma $y = f(x, y')$.**

En general, se toma $y' = p$ y se deriva la ecuación $y = f(x, y')$ respecto de $x$. Si $f$ tiene la forma adecuada, a la nueva E. D. se le puede aplicar alguno de los métodos ya estudiados, procediéndose así a su resolución.

**8.1.** Cuando

$$y = f(y'),$$

la ecuación que se obtiene mediante el proceso anterior es de variables separadas.

**8.2. Ecuación de Lagrange:**

$$y + x\varphi(y') + \psi(y') = 0.$$

Se reduce a una ecuación lineal con $x$ como función y $p$ como variable. Además, para los $\lambda$ tales que $\lambda + \varphi(\lambda) = 0$ se obtienen como soluciones las rectas $y = \lambda x - \psi(\lambda)$.

**8.3. Ecuación de Clairaut:**

$$y - xy' + \psi(y') = 0.$$

Es un caso particular de ecuación de Lagrange en el que sólo aparecen rectas (y su envolvente).

por $p$, con lo que $1 = (2 + 6p)p'$, es decir, $dx = (2 + 6p)\, dp$. Integrando, obtenemos como solución la familia de curvas paramétricas

$$\begin{cases} x = 2p + 3p^2 + C \\ y = p^2 + 2p^3 \end{cases}.$$

Además, a partir de $p = 0$ se tiene la solución singular $y = 0$.

Para concluir el ejemplo, vamos a ver qué obtenemos si intentamos encontrar la envolvente de la familia de curvas paramétricas anteriores. Se tiene

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 + 6p & 2p + 6p^2 \end{pmatrix} = p(2 + 6p) = 0 \iff p = 0 \text{ o } p = \tfrac{-1}{3}.$$

Con $p = 0$ obtenemos la recta $y = 0$ que, efectivamente, es solución de la E. D.: es la envolvente de las otras soluciones. Pero con $p = \frac{-1}{3}$ aparece la recta $y = \frac{1}{27}$ que, claramente, no es solución. En realidad, en un punto $(x, y)$ de cualquiera de las curvas, el vector tangente es $(\dot{x}, \dot{y}) = (\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}) = (2 + 6p, 2p + 6p^2)$. Así, cuando $p = 0$ tenemos el vector tangente $(\dot{x}, \dot{y}) = (2, 0)$; pero cuando $p = \frac{-1}{3}$ el vector tangente es $(\dot{x}, \dot{y}) = (0, 0)$, es decir, no hay vector tangente. Esto quiere decir que la recta $y = \frac{1}{27}$ es el lugar geométrico de los puntos de retroceso de la familia de curvas solución.

**Ejemplo 8.2**. Resolver

$$y = x + y' - 3(y')^2.$$

Nos encontramos ante una ecuación de Lagrange $y+x\varphi(y')+\psi(y') = 0$ con $\varphi(y') = -1$ y $\psi(y') = -y' + 3(y')^2$. Para resolverla, tomamos $p = y'$ y, derivando la E. D. respecto de $x$, tenemos $p = 1 + p' - 6pp'$, es decir, $(p - 1)\, dx = (1 - 6p)\, dp$. Para $p \neq 1$ podemos poner $dx = \frac{1-6p}{p-1}\, dp = (-6 - \frac{5}{p-1})\, dp$, ecuación de variables separadas. (Fijarse que, al describir el proceso, hemos dicho que tenía que salir aquí una ecuación lineal; por casualidad, lo que nos ha aparecido es una lineal homogénea, que siempre es una E. D. de variables separadas.) Integrándola, $x = -6p - 5\log(p - 1) + C$. Sustituyendo esto y $y' = p$ en la expresión $y = x+y'-3(y')^2$ queda $y = -6p-5\log(p-1)+C+p-3p^2 = -5p-3p^2-5\log(p-1)+C$. Así pues, las curvas paramétricas

$$\begin{cases} x = -6p - 5\log(p - 1) + C \\ y = -5p - 3p^2 - 5\log(p - 1) + C \end{cases}$$

son soluciones de la ecuación de Lagrange de la que partíamos.

Además de éstas, a partir de $p = 1$ se obtiene, sin más que sustituir literalmente en $y = x + p - 3p^2$, la solución singular dada por la recta $y = x - 2$.

**Ejemplo 8.3**. Resolver

$$y = y'x - 2(y')^2.$$

Estamos ante una ecuación de Clairaut $y - xy' + \psi(y') = 0$ con $\psi(y') = 2(y')^2$. Hemos demostrado que, sin más que tomar $y' = \lambda$, las rectas $y = \lambda x - 2\lambda^2$ son solución de la E. D. para cada $\lambda \in \mathbb{R}$. Calculemos su envolvente: en el sistema

$$\begin{cases} y = \lambda x - 2\lambda^2 \\ 0 = x - 4\lambda \end{cases}$$

(recordar que la segunda ecuación se obtiene derivando la primera respecto al parámetro $\lambda$) despejamos $\lambda = \frac{x}{4}$ en la segunda ecuación y, sustituyendo en la primera, encontramos que la envolvente es la parábola $y = \frac{x^2}{8}$.

Por otra parte, si hubiéramos intentado resolver la E. D. directamente, sin utilizar lo que hemos demostrado previamente, tendríamos que tomar $y' = p$, con lo cual $y = px-2p^2$ y, derivando respecto de $x$, $p = p'x + p - 4pp'$, es decir, $(x - 4p)p' = 0$. De aquí, $p' = 0$ o $x = 4p$. Si suponemos $\frac{d^2y}{dx^2} = p' = 0$, tendremos $\frac{dy}{dx} = p = \lambda$ constante, luego, sustituyendo en la E. D., hubiéramos encontrado como soluciones las rectas $y = \lambda x - 2\lambda^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Por último, para hallar la solución singular (envolvente de las rectas), si suponemos $x = 4p$, tendríamos la solución paramétrica

$$\begin{cases} x = 4p \\ y = px - 2p^2 = 4p^2 - 2p^2 = 2p^2 \end{cases} ;$$

lógicamente, sin más que despejar $p$ en la primera expresión y sustituir en la segunda, esta curva es la parábola $y = \frac{x^2}{8}$.

## APARTADO 9.

### Ecuación de la forma $x = f(y, y')$.

Estas ecuaciones son similares a las que aparecen en el apartado 8 pero con el papel de $x$ e $y$ intercambiado. En general, para intentar resolverlas, tomamos $y' = p$ y derivamos $x = f(y, y')$ (o, si se prefiere interpretarlo así, $x = f(y, p)$) respecto de $y$ (en lugar de respecto a $x$, como hacíamos en el apartado 8). Esto requiere tener un poco más de cuidado, además de usar $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx} = \frac{1}{p}$. Así,

$$\frac{1}{p} = \frac{dx}{dy} = f_y(y, p) + f_p(y, p)\, \frac{dp}{dy}.$$

Según como sea $f$, esta nueva ecuación $\frac{1}{p} = f_y(y, p) + f_p(y, p)\, \frac{dp}{dy}$ a la que hemos reducido la que teníamos responde a alguno de los tipos previamente estudiados, luego podríamos resolverla. En cualquier caso, si logramos hacerlo, obtenemos su solución $y = \phi(p, C)$. Con esto, la solución de la ecuación de partida será la familia de curvas paramétricas

$$\begin{cases} x = f(\phi(p, C), p) \\ y = \phi(p, C) \end{cases}.$$

Pero no podemos asegurar que, para una función $f$ cualquiera, sepamos resolver la ecuación intermedia que nos aparece, con lo que no habría forma de continuar el proceso. Se pueden estudiar casos similares a los de la forma $y = f(x, y')$ en los que se garantiza que el método no quedará interrumpido. Los tres casos que merece la pena distinguir son los siguientes:

**9.1**. Ecuación $x = f(y')$.

**9.2**. Ecuación $x + y\varphi(y') + \psi(y') = 0$.

**9.3**. Ecuación $x - \frac{y}{y'} + \psi(y') = 0$.

Se deja al lector que, como ejercicio, describa el método de resolución de estos tres tipos de ecuaciones. Simplemente hay que dedicarse a modificar, con cuidado, el proceso utilizado en los correspondientes tipos 8.1, 8.2 y 8.3, recordando que ahora hay que derivar respecto de $y$ en lugar de respecto de $x$.

**RECETA 9. Ecuación de la forma $x = f(y, y')$.**

En general, se toma $y' = p$ y se deriva la ecuación $x = f(y, y')$ respecto de $y$. Según como sea $f$, la nueva E. D. que así se obtiene es ya conocida, procediéndose a su resolución. Se pueden estudiar casos similares a los de la forma $y = f(x, y')$.

**Ejemplo 9**. Resolver

$$x = (y')^3 + y'.$$

Si tomamos $\frac{dy}{dx} = y' = p$ y derivamos $x = p^3 + p$ respecto de $y$ tenemos

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{dy/dx} = \frac{dx}{dy} = 3p^2 \frac{dp}{dy} + \frac{dp}{dy},$$

que podemos poner como $dy = (3p^3 + p)\, dp$, ecuación en variables separadas. Integrándola, $y = \frac{3}{4}p^4 + \frac{1}{2}p^2 + C$. Por lo tanto, las soluciones de la ecuación $x = (y')^3 + y'$ son la familia de curvas paramétricas

$$\begin{cases} x = p^3 + p \\ y = \frac{3}{4}p^4 + \frac{1}{2}p^2 + C \end{cases}.$$

## APARTADO 10.

**Ecuación de la forma $F(y, y') = 0$.**

Para intentar encontrar sus soluciones, consideremos la curva $F(\alpha, \beta) = 0$. El método de resolución requiere que hayamos logrado encontrar previamente una representación paramétrica de la curva, esto es, $\alpha = \varphi(t)$ y $\beta = \psi(t)$ tal que $F(\varphi(t), \psi(t)) = 0$. Si así ha sido, vamos ahora a efectuar el cambio de función $y$ por $t$ mediante $y = \varphi(t)$, teniendo en cuenta que $y' = \psi(t)$.

Entonces, derivando $y = \varphi(t)$ respecto de $x$ tenemos $y' = \varphi'(t)\, \frac{dt}{dx}$ que, al ser $y' = \psi(t)$, puede escribirse como

$$\psi(t) = \varphi'(t)\, \frac{dt}{dx},$$

ecuación en variables separadas.

• Si $\psi(t)$ no se anula, podemos poner $dx = \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}\, dt$ e, integrando, $x = \int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}\, dt + C$. Como consecuencia, la familia de curvas paramétricas

$$\begin{cases} x = \int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}\, dt + C \\ y = \varphi(t) \end{cases}$$

son soluciones de la E. D. de partida.

• Si existe algún $t_0$ para el que $\psi(t_0) = 0$, formalmente efectuamos el siguiente razonamiento: $0 = \varphi'(t)\, \frac{dt}{dx}$, así que $\varphi'(t) = 0$ y consecuentemente $\varphi(t) = \text{cte.} = \varphi(t_0)$, lo que nos conduciría a la solución $y = \varphi(t_0)$. Y, en efecto, podemos comprobar con rigor que esta recta horizontal es solución de la E. D. sin más que sustituir en ella: $F(y, y') = F(\varphi(t_0), 0) = F(\varphi(t_0), \psi(t_0)) = 0$.

**RECETA 10. Ecuación de la forma $F(y, y') = 0$.**

Consideramos la curva $F(\alpha, \beta) = 0$. Si encontramos una representación paramétrica $\alpha = \varphi(t)$, $\beta = \psi(t)$, $F(\varphi(t), \psi(t)) = 0$, se hace el cambio de función $y$ por $t$ mediante $y = \varphi(t)$, $y' = \psi(t)$. Así, derivando $y = \varphi(t)$ respecto de $x$, aparece una ecuación en variables separadas.

**Ejemplo 10**. Resolver

$$y^{2/3} + (y')^{2/3} = 1.$$

Si tomamos $y = \cos^3 t$, $y' = \operatorname{sen}^3 t$, es claro que $(\cos^3 t)^{2/3} + (\operatorname{sen}^3 t)^{2/3} = 1$. Derivando $y = \cos^3 t$ tenemos $y' = -3\cos^2 t \operatorname{sen} t \frac{dt}{dx}$, lo que, usando $y' = \operatorname{sen}^3 t$, resulta ser $\operatorname{sen}^3 t = -3\cos^2 t \operatorname{sen} t \frac{dt}{dx}$.

Si suponemos, en primer lugar, $\operatorname{sen} t \neq 0$, tenemos $dx = \frac{-3\cos^2 t}{\operatorname{sen}^2 t}\, dt = -3\cot^2 t\, dt$. Integrando $x = -3\int \cot^2 t\, dt = -3\int (1 + \cot^2 t)\, dt + 3\int dt = 3\cot t + 3t + C$. Por tanto, las curvas paramétricas

$$\begin{cases} x = 3\cot t + 3t + C \\ y = \cos^3 t \end{cases}$$

son soluciones de la E. D. de partida.

Por último, para los $t$ tales que $\operatorname{sen}^3 t = 0$, lo cual ocurre cuando $t = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, aparecen como soluciones singulares, tal como justificamos al desarrollar el método, las rectas horizontales $y = \cos^3(k\pi)$, es decir, $y = 1$ e $y = -1$.

# ECUACIONES DIFERENCIALES EN LAS QUE SE PUEDE REDUCIR EL ORDEN

Supongamos que tenemos la E. D.

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad \text{con} \quad n > 1.$$

Al contrario de lo que ocurría con ecuaciones de primer orden, no hay muchos métodos para encontrar soluciones de ecuaciones diferenciales de orden mayor que uno. Por ejemplo, está demostrado que la E. D. lineal general de orden $n > 1$ no es soluble por cuadraturas. Sí que pueden resolverse las ecuaciones lineales de orden $n$ con coeficientes constantes; aunque éste es un tema central en el estudio de la teoría de E. D. O., no nos ocuparemos de ello en estas notas.

Realmente, lo único que vamos a ver aquí es una serie de métodos que permiten reducir el orden de una E. D. Aplicándolos (sucesivamente si es necesario), podremos llegar a una ecuación de primer orden que, con un poco de suerte, se encontrará entre las que ya sabemos resolver.

## APARTADO 11.

**Ecuación de la forma $F(x, y^{(k)}, \dots, y^{(n)}) = 0$ con $1 \le k \le n$.**

Tenemos una ecuación en la que no aparece la variable dependiente $y$ (y además, si $k > 1$, tampoco sus derivadas hasta el orden $k - 1$). Es evidente que el cambio $y^{(k)} = z$ la convierte en

$$F(x, z, \dots, z^{(n-k)}) = 0,$$

que es una E. D. de orden $n - k$. Si logramos resolverla, obtenemos que su solución será $z = \phi(x, C_1, \dots, C_{n-k})$, una familia dependiente de $n - k$ constantes. Entonces, al ser $y^{(k)} = z$, para encontrar las soluciones de la ecuación original bastará con integrar $k$ veces $\phi(x, C_1, \dots, C_{n-k})$ respecto de $x$, es decir,

$$y = \underbrace{\iint \cdots \int}_{k \text{ veces}} \phi(x, C_1, \dots, C_{n-k}) \underbrace{dx\, dx \dots dx}_{k \text{ veces}},$$

lo cual introducirá $k$ nuevas constantes en la solución general. De este modo, dicha solución general tendrá la forma

$$y = \underbrace{\iint \cdots \int}_{k \text{ veces}} \phi(x, C_1, \dots, C_{n-k}) \underbrace{dx\, dx \dots dx}_{k \text{ veces}} + C_{n-k+1} x^k + \cdots + C_{n-1} x + C_n.$$

**RECETA 11. Ecuación de la forma $F(x, y^{(k)}, \dots, y^{(n)}) = 0$.**

Mediante el cambio $y^{(k)} = z$ se convierte en una ecuación de orden $n-k$.

**Ejemplo 11.** Resolver

$$y'' - xy''' + (y''')^3 = 0.$$

Tomemos $y'' = z$, con lo que la ecuación se transforma en $z - xz' + (z')^3 = 0$, que es de Clairaut. Sin más que sustituir $z' = \lambda$, las soluciones de ésta son las rectas $z = \lambda x - \lambda^3$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Además, también son solución las envolventes. Para calcularlas, en el sistema

$$\begin{cases} z = \lambda x - \lambda^3 \\ 0 = x - 3\lambda^2 \end{cases}$$

despejamos $\lambda = \pm\sqrt{\frac{x}{3}}$ en la segunda ecuación, con lo que, sustituyendo en la primera, encontramos las dos envolventes $z = \pm\frac{2x}{3}\sqrt{\frac{x}{3}}$. Una vez resuelta completamente la ecuación de Clairaut, hallemos las soluciones de la original:

Como $y'' = z$, a partir de $z = \lambda x - \lambda^3$, integrando dos veces,

$$y = \int \left( \int (\lambda x - \lambda^3)\, dx \right) dx = \frac{\lambda x^3}{6} - \frac{\lambda^3 x^2}{2} + C_1 x + C_2.$$

Cambiando la notación de las constantes, $y = K_1 x^3 - 108 K_1^3 x^2 + K_2 x + K_3$.

Por último, de $z = \pm\frac{2x}{3}\sqrt{\frac{x}{3}}$ obtenemos

$$y = \int \left( \int \frac{\pm 2}{3\sqrt{3}} x^{3/2}\, dx \right) dx = \int \left( \frac{\pm 2}{3\sqrt{3}} \frac{x^{5/2}}{5/2} + C_1 \right) dx = \frac{\pm 4}{15\sqrt{3}} \frac{x^{7/2}}{7/2} + C_1 x + C_2.$$

Es decir, las dos familias de curvas $y = \frac{8x^3}{105}\sqrt{\frac{x}{3}} + C_1 x + C_2$ y $y = -\frac{8x^3}{105}\sqrt{\frac{x}{3}} + C_1 x + C_2$.

## APARTADO 11′.

### Ecuaciones lineales de orden superior.

Supongamos que tenemos una ecuación

$$a_n(x) y^{(n)} + a_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x) y' + a_0(x) y = g(x)$$

con $n > 1$. En primer lugar, conviene dejar constancia de que existe una teoría general bien establecida sobre ecuaciones diferenciales lineales de cualquier orden. Pero éste es un estudio esencialmente teórico: no es posible describir la solución general de una E. D.

lineal de orden 2 o superior por medio de cuadraturas. Sin embargo, sí que se calculan las soluciones de forma muy satisfactoria cuando nos encontramos ante ecuaciones lineales con coeficientes constantes (es decir, cuando $a_i(x) = a_i \in \mathbb{R}$, $0 \leq i \leq n$). Pero todo esto queda fuera de los objetivos que estamos persiguiendo aquí. Fundamentalmente, en este apartado nos preocuparemos sólo de ver cómo una ecuación lineal de orden $n > 1$ puede reducirse de orden, sucesivamente si es necesario, hasta llegar a una ecuación lineal de primer orden, de las que hemos estudiado en el apartado 5. En realidad, este método de reducción de orden radica en haber encontrado previamente una solución particular de la lineal homogénea asociada

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0;$$

si no hemos sabido hallar tal solución particular, el proceso aquí descrito no tiene para nosotros ninguna utilidad práctica.

Supongamos pues que hemos logrado encontrar una solución particular $y_n(x)$ de la homogénea asociada (más adelante se pondrá de manifiesto por qué resulta adecuado introducir una $n$ en la notación de la solución particular). En este caso, efectuamos el cambio de función $y$ por $z$ dado por $y(x) = y_n(x)z(x)$. Sin más que derivar sucesivamente, obtenemos

$$\begin{aligned} y'(x) &= y_n'(x)z(x) + y_n(x)z'(x) \\ y''(x) &= y_n''(x)z(x) + 2y_n'(x)z'(x) + y_n(x)z''(x) \\ &\cdots \\ y^{(n)}(x) &= y_n^{(n)}(x)z(x) + \cdots + \binom{n}{k} y_n^{(k)}(x)z^{(n-k)}(x) + \cdots + y_n(x)z^{(n)}(x). \end{aligned}$$

Sustituyendo en la lineal, y sacando factor común los $z^{(k)}$, queda

$$\begin{aligned} a_n y_n z^{(n)} + (n a_n y_n' + a_{n-1} y_n) z^{(n-1)} + \cdots + (n a_n y_n^{(n-1)} + \cdots + 2a_2 y_n' + a_1 y_n) z' \\ + (a_n y_n^{(n)} + \cdots + a_1 y_n' + a_0 y_n) z = g(x). \end{aligned}$$

El coeficiente de $z$ en la expresión anterior es 0 por ser precisamente $y_n$ solución de la ecuación lineal homogénea. Así, podemos poner

$$b_n(x)z^{(n)} + b_{n-1}(x)z^{(n-1)} + \cdots + b_1(x)z' = g(x).$$

Ésta es una E. D. de las estudiadas en el apartado anterior. Si en ella hacemos $z' = u$ aparece

$$b_n(x)u^{(n-1)} + b_{n-1}(x)u^{(n-2)} + \cdots + b_1(x)u = g(x),$$

que es una ecuación lineal de orden $n - 1$.

Si sabemos resolver esta nueva ecuación (por ejemplo, si $n - 1 = 1$ y aplicamos cualquiera de los métodos de resolución de E. D. lineales de primer orden ya estudiados),

tendremos que su solución general será una función $u(x) = \phi(x, C_1, \dots, C_{n-1})$ dependiente de $n-1$ constantes. Entonces, la solución de la de partida será

$$\begin{aligned} y(x) &= y_n(x)z(x) = y_n(x) \int u(x)\,dx = y_n(x) \int \phi(x, C_1, \dots, C_{n-1})\,dx \\ &= y_n(x) \int \phi(x, C_1, \dots, C_{n-1})\,dx + C_n y_n(x), \end{aligned}$$

donde $C_n$ surge como constante de integración al calcular una primitiva de $\phi$ (que aparece representada con la misma notación de integral, esperando que este pequeño y habitual abuso de notación no introduzca confusión en el lector). Si no conseguimos resolverla en general, se puede intentar reducir el orden de nuevo encontrando ahora $u_{n-1}(x)$ solución particular de la homogénea asociada. Si este proceso lo logramos hacer el suficiente número de veces, llegaremos siempre a una ecuación lineal de orden 1, que sí que sabemos resolver.

Finalizaremos comentando cómo varios de los resultados estudiados para E. D. lineales de primer orden también pueden aplicarse a lineales de orden superior. En primer lugar, es inmediato comprobar (tal como hacíamos en (*iii*) del apartado 5) que la solución general de la lineal puede expresarse como una solución particular de la lineal más la solución general de la lineal homogénea asociada. (Lógicamente, si la lineal ya es homogénea, puede tomarse como solución particular la función nula.)

Por otra parte, el proceso de reducción de orden que hemos utilizado nos muestra, por inducción, que la solución general de la lineal de orden $n$ puede expresarse como

$$y(x) = y_p(x) + C_1 y_1(x) + \cdots + C_{n-1} y_{n-1}(x) + C_n y_n(x),$$

donde $y_p(x)$ es una solución particular de la lineal. En efecto, para orden $n = 1$ lo hemos probado al tratar las lineales de primer orden. Y, para efectuar el paso de inducción de orden $n-1$ a $n$, basta fijarse en el desarrollo del proceso de reducción seguido. En efecto, por hipótesis de inducción, la solución de la E. D. en $u(x)$ de orden $n-1$ que nos aparecía tendrá la forma

$$u(x) = \phi(x, C_1, \dots, C_{n-1}) = u_p(x) + C_1 u_1(x) + \cdots + C_{n-1} u_{n-1}(x).$$

Por tanto, la solución de la ecuación de partida de orden $n$ será

$$\begin{aligned} y(x) &= y_n(x)z(x) = y_n(x) \int u(x)\,dx = y_n(x) \int \phi(x, C_1, \dots, C_{n-1})\,dx \\ &= y_n(x) \int \big(u_p(x) + C_1 u_1(x) + \cdots + C_{n-1} u_{n-1}(x)\big)\,dx \\ &= y_n(x) \left( \int u_p(x)\,dx + C_1 \int u_1(x)\,dx + \cdots + C_{n-1} \int u_{n-1}(x)\,dx + C_n \right) \\ &= y_n(x) \big(U_p(x) + C_1 U_1(x) + \cdots + C_{n-1} U_{n-1}(x) + C_n\big) \\ &= y_p(x) + C_1 y_1(x) + \cdots + C_{n-1} y_{n-1}(x) + C_n y_n(x), \end{aligned}$$

tal como queríamos comprobar.

También existe el método de variación de las constantes para E. D. lineales de orden $n$, y está destinado a resolver la ecuación lineal cuando se conoce la solución general de la homogénea asociada, $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \cdots + C_n y_n(x)$. En estas condiciones, se busca la solución de la lineal de la forma

$$y(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) + \cdots + C_n(x)y_n(x)$$

para ciertas funciones $C_k(x)$ a determinar. Para encontrar estas $C_k(x)$, se deriva sucesivamente la expresión anterior y se sustituye en la ecuación lineal, igualando a cero los coeficientes de los $y_k(x)$. Aunque no nos preocuparemos de ello, puede demostrarse rigurosamente que esto siempre conduce a la solución buscada.

**RECETA 11′. Ecuaciones lineales de orden superior.**

Son de la forma

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x).$$

Si logramos encontrar alguna solución $y_n(x)$ de la lineal homogénea asociada, el cambio de función $y = y_n z$ hace que la lineal se transforme en una del tipo anterior, cuyo orden se puede reducir. Así, aparece una nueva ecuación lineal, esta vez de orden $n - 1$.

**Ejemplo 11′.** Resolver

$$xy'' + (7x - 1)y' - 7y = x^2 e^{-7x}$$

sabiendo que la lineal homogénea asociada tiene una solución de la forma $e^{ax}$.

En primer lugar, determinemos $a$ para que $y_2 = e^{ax}$ sea solución de $xy'' + (7x-1)y' - 7y = 0$. Derivando, $y_2' = ae^{ax}$, $y_2'' = a^2 e^{ax}$; sustituyendo, $a^2 x e^{ax} + (7x-1)ae^{ax} - 7e^{ax} = 0$, es decir, $[x(a^2 + 7a) - a - 7]e^{ax} = 0$, lo cual se consigue con $a = -7$.

Apliquemos ahora el método de reducción de orden. Tomamos $y = y_2 z$, con lo cual, derivando, $y' = y_2' z + y_2 z'$, $y'' = y_2'' z + 2y_2' z' + y_2 z''$. Si sustituimos en la lineal, queda $(y_2'' z + 2y_2' z' + y_2 z'')x + (7x-1)(y_2' z + y_2 z') - 7y_2 z = x^2 e^{-7x}$. Sacando factor común $z''$, $z'$ y $z$, aparece $xy_2 z'' + [2xy_2' + (7x-1)y_2]z' + [xy_2'' + (7x-1)y_2' - 7y_2]z = x^2 e^{-7x}$. Como el coeficiente de $z$ coincide con la lineal homogénea, de la que $y_2$ es solución, esta ecuación, tras sustituir $y_2$ e $y_2'$, se transforma en $xe^{-7x} z'' + [-14xe^{-7x} + (7x-1)e^{-7x}]z' = x^2 e^{-7x}$. Simplificando $e^{-7x}$, podemos poner $xz'' + (-7x-1)z' = x^2$.

(Nótese que suele ser más cómodo utilizar el símbolo $y_2$ en lugar de su expresión concreta ya que, de este modo, no hace falta arrastrar tampoco las expresiones de $y_2'$ ni $y_2''$, sino que basta con dar su valor al final de las simplificaciones. En particular, no se

necesita calcular $y_2''$. Por el contrario, si empleamos directamente las expresiones de $y_2$, $y_2'$ e $y_2''$ desde el principio, esto puede ayudarnos a detectar algún error que hayamos podido cometer: es fácil que el error nos llevara a un punto sin salida en el que no se podría continuar el proceso al no anularse el coeficiente de $z$.)

Tenemos ahora una E. D. de segundo orden en $z(x)$ en la que no aparece explícitamente $z$. Para reducirla de orden, basta tomar $z' = u$, con lo cual queda $xu' + (-7x - 1)u = x^2$, esto es, $u' + (-7 - \frac{1}{x})u = x$, lineal de primer orden. Resolvámosla aplicando directamente la fórmula general que hemos deducido en el apartado 5. Así, sin más que tomar $a(x) = -7 - \frac{1}{x}$ y $b(x) = x$, calculando previamente

$$\exp\left(\int a(x)\,dx\right) = \exp\left(\int \left(-7 - \frac{1}{x}\right)dx\right) = \exp(-7x - \log x) = x^{-1}e^{-7x},$$

tendremos que su solución es

$$u(x) = xe^{7x}\left[\int xx^{-1}e^{-7x}\,dx + C_1\right] = xe^{7x}\left(\tfrac{-1}{7}e^{-7x} + C_1\right) = \tfrac{-1}{7}x + C_1xe^{7x}.$$

Deshaciendo los cambios,

$$\begin{aligned} y(x) &= y_2(x)z(x) = y_2(x)\int u(x)\,dx = e^{-7x}\int \left(\tfrac{-1}{7}x + C_1xe^{7x}\right)\,dx \\ &= e^{-7x}\left(\frac{-x^2}{14} + C_1\int xe^{7x}\,dx\right) = e^{-7x}\left(\frac{-x^2}{14} + \tfrac{1}{7}C_1xe^{7x} - C_1\int \tfrac{1}{7}e^{7x}\,dx\right) \\ &= e^{-7x}\left(\tfrac{-1}{14}x^2 + \tfrac{1}{7}C_1xe^{7x} - \tfrac{1}{49}C_1e^{7x} + C_2\right) = \tfrac{-1}{14}x^2e^{-7x} + C_1\left(\tfrac{1}{7}x - \tfrac{1}{49}\right) + C_2e^{-7x}. \end{aligned}$$

Cambiando la notación de $C_1$ por $49C_1$, la solución general de la lineal de segundo orden queda

$$y(x) = \tfrac{-1}{14}x^2e^{-7x} + C_1(7x - 1) + C_2e^{-7x}.$$

## APARTADO 12.

**Ecuación de la forma $F(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$.**

En esta ecuación no aparece explícitamente la variable independiente $x$. Vamos a ver cómo se reduce de orden si efectuamos el cambio $y' = p$ y la transformamos en una nueva en la que aparecerán $y$, $p$ y las derivadas de $p$ respecto de $y$. (¡Atención!: respecto de $y$, no respecto de $x$.) Para ello, vamos a ver el proceso a seguir para escribir las derivadas sucesivas de $y$ respecto de $x$ en función de $y$, $p$, y las derivadas de $p$ respecto de $y$. Ya tenemos $\frac{dy}{dx} = y' = p$. Para las siguientes, si denotamos $p' = \frac{dp}{dy}$, $p'' = \frac{d^2p}{dy^2}$, …, y hacemos uso de la regla de la cadena, entonces

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p'p,$$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{d}{dx}(p'p) = \frac{d}{dy}(p'p)\,\frac{dy}{dx} = \left[p''p + (p')^2\right]p,$$

y así sucesivamente. Nótese que en la expresión de cada $y^{(k)}$ sólo aparecen derivadas de $p$ hasta el orden $k-1$.

Con esto, sustituyendo en $F$ los valores que hemos encontrado para $y'$, $y''$, …, $y^{(n)}$, la E. D. original se transforma en una de la forma

$$G\left(y, \frac{dp}{dy}, \dots, \frac{d^{n-1}p}{dy^{n-1}}\right) = 0,$$

cuyo orden es $n-1$.

Si logramos resolver esta nueva ecuación encontraremos que, en general, su solución será de la forma $p = \phi(y, C_1, \dots, C_{n-1})$, dependiente de $n-1$ constantes. Ahora, devolviendo a $p$ su valor original, es decir, $p = \frac{dy}{dx}$, obtenemos $\frac{dy}{dx} = \phi(y, C_1, \dots, C_{n-1})$, que es otra ecuación, esta vez de primer orden, que también hay que resolver (lo cual, además, añade una nueva constante). Las soluciones de esta última serán, obviamente, las mismas que las de la E. D. de partida.

**RECETA 12. Ecuación de la forma $F(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$.**

Hacemos el cambio $y' = p$ y transformamos la E. D. en una nueva dependiendo de $y$, $p$ y las derivadas de $p$ respecto de $y$. Ésta es de orden $n-1$.

**Ejemplo 12**. Resolver

$$2yy'' = (y')^2 + 1.$$

Tomando $y' = p$, y tal como hemos comprobado al explicar el método, se tiene $y'' = p'p$ donde $p' = \frac{dp}{dy}$. Entonces, al sustituir en la E. D., ésta se nos transforma en $2yp'p = p^2 + 1$, es decir, $\frac{2p\,dp}{p^2+1} = \frac{dy}{y}$, que es de variables separadas. Si integramos, $\log(p^2+1) = \log(C_1 y)$, de donde $p^2 + 1 = C_1 y$, y por tanto $p = \pm\sqrt{C_1 y - 1}$. Volvemos ahora a restaurar el valor $p = \frac{dy}{dx}$, con lo cual nos aparece $\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{C_1 y - 1}$. Ésta es de nuevo una ecuación en variables separadas, que podemos escribir como $(C_1 y - 1)^{-1/2}\,dy = \pm dx$. Integrándola, $2\sqrt{C_1 y - 1} = \pm C_1 x + C_2$, con lo que ya hemos encontrado las soluciones de la E. D. de partida.

**APARTADO 12$'$.**

**Si la ecuación** $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$
es tal que, para $\alpha$ y $m$ fijos, $F$ cumple

$$F(\lambda x, \lambda^m u_0, \lambda^{m-1} u_1, \dots, \lambda^{m-n} u_n) = \lambda^\alpha F(x, u_0, u_1, \dots, u_n),$$

vamos a ver que, efectuando un cambio tanto de variable independiente como de dependiente, esta E. D. se podrá transformar en una del tipo anterior (es decir, en la que no aparecerá la variable independiente). Una ecuación de estas características suele decirse que es *homogénea generalizada* de grado $\alpha$, en la que cada factor $x$ contribuye con grado 1, cada $y$ con grado $m$, $y'$ con grado $m-1$, $y''$ con $m-2$, etcétera.

Tomamos dos nuevas variables $t$ y $z$ ($t$ la independiente y $z$ la dependiente) que relacionamos con las originales $x$ e $y$ mediante $x = e^t$, $y = e^{mt} z$. Con esto, vamos a ver cómo escribir $y' = \frac{dy}{dx}, \dots, y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}$ en función de $t$, $z$ y las derivadas de $z$ respecto de $t$. Si denotamos $z' = \frac{dz}{dt}$ (y, por supuesto, $z^{(k)} = \frac{d^k z}{dt^k}$), tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{me^{mt} z + e^{mt} z'}{e^t} = e^{(m-1)t}(z' + mz).$$

A partir de aquí,

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 y}{dx^2} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt}\Big(e^{(m-1)t}(z' + mz)\Big)\frac{1}{dx/dt} \\
&= \Big[(m-1)e^{(m-1)t}(z' + mz) + e^{(m-1)t}(z'' + mz')\Big]\frac{1}{e^t} \\
&= e^{(m-2)t}\big(z'' + (2m-1)z' + m(m-1)z\big);
\end{aligned}$$

análogamente

$$\begin{aligned}
\frac{d^3 y}{dx^3} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2 y}{d^2 x}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{d^2 y}{d^2 x}\right)\frac{dt}{dx} \\
&= \frac{d}{dt}\Big(e^{(m-2)t}(z'' + (2m-1)z' + m(m-1)z)\Big)\frac{1}{dx/dt} \\
&= \Big[(m-2)e^{(m-2)t}(z'' + (2m-1)z' + m(m-1)z) \\
&\qquad\qquad + e^{(m-2)t}(z''' + (2m-1)z'' + m(m-1)z')\Big]\frac{1}{e^t} \\
&= e^{(m-3)t}\big(z''' + (3m-3)z'' + (3m^2 - 6m + 2)z' + m(m-1)(m-2)z\big),
\end{aligned}$$

y así sucesivamente. En general, por inducción, es claro que

$$\frac{d^{(k)} y}{dx^{(k)}} = e^{(m-k)t} g_k(z, z', \dots, z^{(k)}).$$

De este modo, sustituyendo en la E. D. que estamos intentando resolver, obtenemos

$$F(e^t, e^{mt}z, e^{(m-1)t}(z' + mz), \dots, e^{(m-n)t}g_n(z, z', \dots, z^{(n)})) = 0;$$

extrayendo $\lambda = e^t$, esto resulta ser

$$e^{\alpha t}F(1, z, (z' + mz), \dots, g_n(z, z', \dots, z^{(n)})) = 0.$$

Como $e^{\alpha t}$ no puede anularse, el otro factor tiene que ser cero, luego hemos transformado la ecuación de partida en una de la forma

$$G(z, z', \dots, z^{(n)}) = 0,$$

en la que no aparece explícitamente la variable independiente $t$. Esta ecuación puede reducirse de orden aplicando el proceso descrito en el apartado anterior. En cualquier caso, si logramos resolverla, su solución será $z = \phi(t, C_1, \dots, C_n)$; deshaciendo los cambios $x = e^t$ e $y = e^{mt}z$, tendremos que la solución de la E. D. original será $y = x^m\phi(\log x, C_1, \dots, C_n)$.

**RECETA 12′. Si la ecuación** $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ es tal que, para $\alpha$ y $m$ fijos, $F$ cumple

$$F(\lambda x, \lambda^m u_0, \lambda^{m-1}u_1, \dots, \lambda^{m-n}u_n) = \lambda^\alpha F(x, u_0, u_1, \dots, u_n),$$

haciendo el cambio $x = e^t$, $y = e^{mt}z$ la E. D. se transforma en una de la forma $G(z, z', \dots, z^{(n)}) = 0$, a la que se puede aplicar el método anterior.

**Ejemplo 12′.** Resolver

$$4x^2y^3y'' = x^2 - y^4.$$

Analicemos en primer lugar cómo lograr que esta ecuación sea homogénea generalizada en la que cada factor $x$ contribuya con grado 1, y los factores $y$, $y'$, $y''$ con grados $m$, $m-1$ y $m-2$ respectivamente. Para ello, cada monomio tiene que ser del mismo grado. En el miembro de la derecha, esto se consigue con $2 = 4m$, es decir, $m = \frac{1}{2}$, con lo cual $x^2 - y^4$ es de grado 2. Entonces, el miembro de la izquierda es de grado $2 + 3m + (m-2) = 2 + \frac{3}{2} + (\frac{1}{2} - 2) = 2$, coincidente con el del otro miembro. Así pues, con $m = \frac{1}{2}$ la E. D. es homogénea generalizada (de grado 2, aunque esto no tiene importancia).

Hagamos ahora los cambios $x = e^t$, $y = e^{t/2}z$, y denotemos $z' = \frac{dz}{dt}$, $z'' = \frac{d^2z}{dt^2}$. De este modo,

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{\frac{1}{2}e^{t/2}z + e^{t/2}z'}{e^t} = e^{-t/2}(z' + \tfrac{1}{2}z),$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt}\left(e^{-t/2}(z' + \tfrac{1}{2}z)\right)\frac{1}{dx/dt}$$
$$= \left[\tfrac{-1}{2}e^{-t/2}(z' + \tfrac{1}{2}z) + e^{-t/2}(z'' + \tfrac{1}{2}z')\right]\frac{1}{e^t} = e^{-3t/2}(z'' - \tfrac{1}{4}z).$$

Sustituyendo en la E. D., $4e^{2t}e^{3t/2}z^3e^{-3t/2}(z'' - \frac{1}{4}z) = e^{2t} - e^{2t}z^4$, de donde, simplificando, $4z^3z'' = 1$, ecuación en la que no aparece la variable independiente $t$. Para resolverla, tomamos $z' = p$, con lo que

$$z'' = \frac{dz'}{dt} = \frac{dp}{dt} = \frac{dp}{dz}\frac{dz}{dt} = p'p$$

con la notación $p' = \frac{dp}{dz}$. Así, tenemos la nueva ecuación $4z^3p'p = 1$, con variable dependiente $p$ e independiente $z$, que ya es de primer orden. Esta ecuación, que podemos poner como $4p\,dp = z^{-3}\,dz$, es de variables separadas. Integrando, $2p^2 = -\frac{1}{2}z^{-2} + C_1$, o sea, $4p^2 = 2C_1 - z^{-2}$. Como $p = z' = \frac{dz}{dt}$, hemos llegado ahora a plantear $4(z')^2 = 2C_1 - z^{-2}$, es decir, $2z' = \pm\sqrt{2C_1 - z^{-2}}$, que podemos escribir como $\pm 2(2C_1 - z^{-2})^{-1/2}\,dz = dt$. De nuevo integrando,

$$t + C_2 = \pm\int 2(2C_1 - z^{-2})^{-1/2}\,dz = \pm\int 2z(2C_1z^2 - 1)^{-1/2}\,dz$$
$$= \pm\frac{1}{2C_1}\frac{(2C_1z^2 - 1)^{1/2}}{1/2} = \pm\frac{1}{C_1}(2C_1z^2 - 1)^{1/2}.$$

Volviendo a las variables iniciales $x = e^t$ e $y = e^{t/2}z$, aparece ahora $\log x + C_2 = \pm\frac{1}{C_1}(2C_1y^2x^{-1} - 1)^{1/2}$, con lo cual, sin más que cambiar la notación de las constantes, $K_1 \log x + K_2 = \pm\sqrt{2K_1y^2x^{-1} - 1}$. Así pues, elevando al cuadrado y despejando $y^2$, las soluciones de la E. D. de partida vienen dadas por

$$y^2 = \frac{(K_1 \log x + K_2)^2 + 1}{2K_1x},$$

donde $K_1$ y $K_2$ son constantes arbitrarias.

## APARTADO 13.

**Si la ecuación** $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$

es tal que, para $\alpha$ fijo, $F$ cumple

$$F(x, \lambda u_0, \lambda u_1, \dots, \lambda u_n) = \lambda^\alpha F(x, u_0, u_1, \dots, u_n),$$

vamos a comprobar cómo, a través de un cambio de variable dependiente, el orden se puede reducir en uno. La propiedad que caracteriza a la función $F$ suele expresarse diciendo que $F$ es *homogénea* de grado $\alpha$ *respecto a los argumentos* $u_0, u_1, \dots, u_n$. Con este

lenguaje, la ecuación que estamos intentando resolver es homogénea de grado $\alpha$ respecto de $y, y', \dots, y^{(n)}$.

En primer lugar, es claro que, cuando $\alpha > 0$, la función constante $y = 0$ (para la cual $y' = y'' = \cdots = 0$) es solución ya que, efectivamente, $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = F(x, 0, 0, \dots, 0) = 0^\alpha F(x, 1, 1, \dots, 1) = 0$.

Para hallar las demás soluciones, tomemos una nueva función $z$ dada por $y' = yz$. Obviamente, esto es equivalente a decir $y = \exp(\int z\,dx)$, puesto que

$$\frac{dy}{dx} = yz \iff \frac{dy}{y} = z\,dx \iff \log y = \int z\,dx \iff y = \exp\left(\int z\,dx\right).$$

En cualquier caso, si derivamos sucesivamente la expresión $y' = yz$, obtenemos $y'' = y'z + yz' = yz^2 + yz' = y(z^2 + z')$, $y''' = y''z + 2y'z' + yz'' = y(z^2 + z')z + 2yzz' + yz'' = y(z^2 + 3zz' + z'')$, etcétera. Es importante destacar el hecho de que siempre aparece una relación del tipo $y^{(k)} = yg_k(z, z', \dots, z^{(k-1)})$. Entonces, sin más que sustituir, la E. D. queda

$$F(x, y, yz, y(z^2 + z'), \dots, yg_n(z, z', \dots, z^{(n-1)})) = 0,$$

de donde, extrayendo $\lambda = y$,

$$y^\alpha F(x, 1, z, z^2 + z', \dots, g_n(z, z', \dots, z^{(n-1)})) = 0,$$

y por tanto, como estamos suponiendo que $y$ no es la función nula, el segundo factor habrá de ser cero. Claramente, esto puede ponerse en la forma

$$G(x, z, z', \dots, z^{(n-1)}) = 0,$$

que es una ecuación de orden $n - 1$. Si logramos resolverla, tendremos que sus soluciones serán $z = \phi(x, C_1, \dots, C_{n-1})$, una familia dependiente de $n - 1$ constantes. Entonces, las soluciones de la E. D. original serán

$$y = \exp\left(\int \phi(x, C_1, \dots, C_{n-1})\,dx\right),$$

lo que, al integrar, introduce la $n$-ésima constante. Así, puede ponerse

$$y = C_n \exp\left(\int \phi(x, C_1, \dots, C_{n-1})\,dx\right).$$

**RECETA 13. Si la ecuación** $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$
es tal que, para $\alpha$ fijo, $F$ cumple

$$F(x, \lambda u_0, \lambda u_1, \dots, \lambda u_n) = \lambda^\alpha F(x, u_0, u_1, \dots, u_n),$$

entonces el cambio de función dado por $y' = yz$ (es decir, $y = \exp(\int z\,dx)$) hace que el orden se reduzca en uno.

**Ejemplo 13**. Resolver

$$3x^2((y')^2 - yy'') = y^2.$$

Esta ecuación es homogénea de grado 2 respecto de $y, y', y''$ pues, al sustituir $y, y', y''$ por $\lambda y, \lambda y', \lambda y''$, la ecuación queda multiplicada por $\lambda^2$. Para resolverla, hacemos el cambio $y$ por $z$ dado por $y = \exp(\int z(x)\, dx)$, con lo cual

$$y' = z \exp\left(\int z\, dx\right), \qquad y'' = (z' + z^2) \exp\left(\int z\, dx\right).$$

Sustituyendo en la E. D. queda

$$3x^2 \left[z^2 \exp\left(2 \int z\, dx\right) - (z' + z^2) \exp\left(2 \int z\, dx\right)\right] = \exp\left(2 \int z\, dx\right),$$

de donde, simplificando $\exp(2 \int z\, dx)$, se sigue $-3x^2 z' = 1$, ecuación en variables separadas. Tras ponerla como $dz = -\frac{1}{3}x^{-2}\, dx$ la integramos, con lo que $z = \frac{1}{3}x^{-1} + C_1$. Por último,

$$\begin{aligned} y &= \exp\left(\int z(x)\, dx\right) = \exp\left(\int \left(\tfrac{1}{3}x^{-1} + C_1\right)\, dx\right) \\ &= \exp\left(\tfrac{1}{3}\log x + C_1 x + C_2\right) = x^{1/3} \exp(C_1 x + C_2), \end{aligned}$$

luego la solución de la ecuación original es, sin más que cambiar la notación de las constantes, la familia de funciones $y = K_1 x^{1/3} e^{K_2 x}$.

# Pequeña bibliografía en castellano

F. Ayres, *Ecuaciones diferenciales*, Col. Schaum, McGraw-Hill, México, 1988.

M. Braun, *Ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones*, Grupo Editorial Iberoamérica, México, 1990.

M. de Guzmán, *Ecuaciones diferenciales ordinarias. Teoría de estabilidad y control*, Alhambra, Madrid, 1975.

A. Kiseliov, M. Krasnov y G. Makarenko, *Problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias*, 3.ª ed., Mir, Moscú, 1970.

F. Marcellán, L. Casasús y A. Zarzo, *Ecuaciones diferenciales. Problemas lineales y aplicaciones*, McGraw-Hill, Madrid, 1990.

R. K. Nagle y E. B. Saff, *Fundamentos de ecuaciones diferenciales*, 2.ª ed., Addison-Wesley Iberoamericana, Wilmington (Delaware, USA), 1992.

S. Novo, R. Obaya y J. Rojo, *Ecuaciones y sistemas diferenciales*, AC, Madrid, 1992.

G. F. Simmons, *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones y notas históricas*, 2.ª ed., McGraw-Hill, Madrid, 1993.

D. E. Zill, *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones*, 2.ª ed., Grupo Editorial Iberoamérica, México, 1988.

# APÉNDICE: Métodos básicos para calcular integrales indefinidas

**1.º Reglas principales de integración:**

(1) Si $F'(x) = f(x)$, entonces
$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$
con $C$ una constante arbitraria.

(2) $\displaystyle\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$, donde $a$ es una constante.

(3) $\displaystyle\int (f(x) \pm g(x))\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$.

(4) Si $\displaystyle\int f(x)\,dx = F(x) + C$ y $u = \varphi(x)$, entonces
$$\int f(u)\,du = F(u) + C,$$
siendo $du = \varphi'(x)\,dx$. En particular, si $F'(x) = f(x)$, se tiene
$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C, \quad a \neq 0.$$

**2.º Tabla de integrales inmediatas:**

(a) $\displaystyle\int x^k\,dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} + C, \quad k \neq -1.$

(b) $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \log|x| + C.$

(c) $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x + C.$

(d) $\displaystyle\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\log a} + C, \quad a > 0.$

(e) $\displaystyle\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C.$

(f) $\displaystyle\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C.$

(g) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int (1 + \operatorname{tg}^2 x)\,dx = \operatorname{tg} x + C.$

(h) $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x} = \int (1 + \operatorname{cotg}^2 x)\,dx = -\operatorname{cotg} x + C.$

(i) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x} = \log|\sec x + \operatorname{tg} x| + C = \log\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C.$

(j) $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x} = \log|\operatorname{cosec} x - \operatorname{cotg} x| + C = \log\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$

(k) $\displaystyle\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + C.$

(l) $\displaystyle\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + C.$

(m) $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C.$

(n) $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\coth x + C.$

(ñ) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a}\operatorname{arc\,cotg}\frac{x}{a} + C_1, \quad a \neq 0.$

(o) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C, \quad a \neq 0.$

(p) $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C = \frac{1}{a}\operatorname{arg\,th}\frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0.$

(q) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \log\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + C = \frac{1}{a}\operatorname{arg\,sh}\frac{x}{\sqrt{a}} + C, \quad a > 0.$

(r) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a}} = \log\left|x + \sqrt{x^2 - a}\right| + C = \frac{1}{a}\operatorname{arg\,ch}\frac{x}{\sqrt{a}} + C, \quad a > 0.$

(s) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arc\,sen}\frac{x}{a} + C = -\operatorname{arc\,cos}\frac{x}{a} + C_1, \quad a > 0.$

**3.º Método de sustitución:**

Si en la integral $\int f(x)\,dx$ se efectúa la sustitución (o *cambio de variable*) $x = \varphi(t)$ se tiene

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

La función $\varphi$ se procura elegir de tal manera que el segundo miembro de la fórmula anterior tenga una forma más adecuada para la integración.

**4.º Integración por partes:**

Si tenemos dos funciones $u = \varphi(x)$ y $v = \psi(x)$, se verifica

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du,$$

donde $du = \varphi'(x)\,dx$ y $dv = \psi'(x)\,dx$. En este método, $u$ y $v$ hay que buscarlas de tal forma que la nueva integral que aparece sea más asequible que la de partida.